Sujet BIS

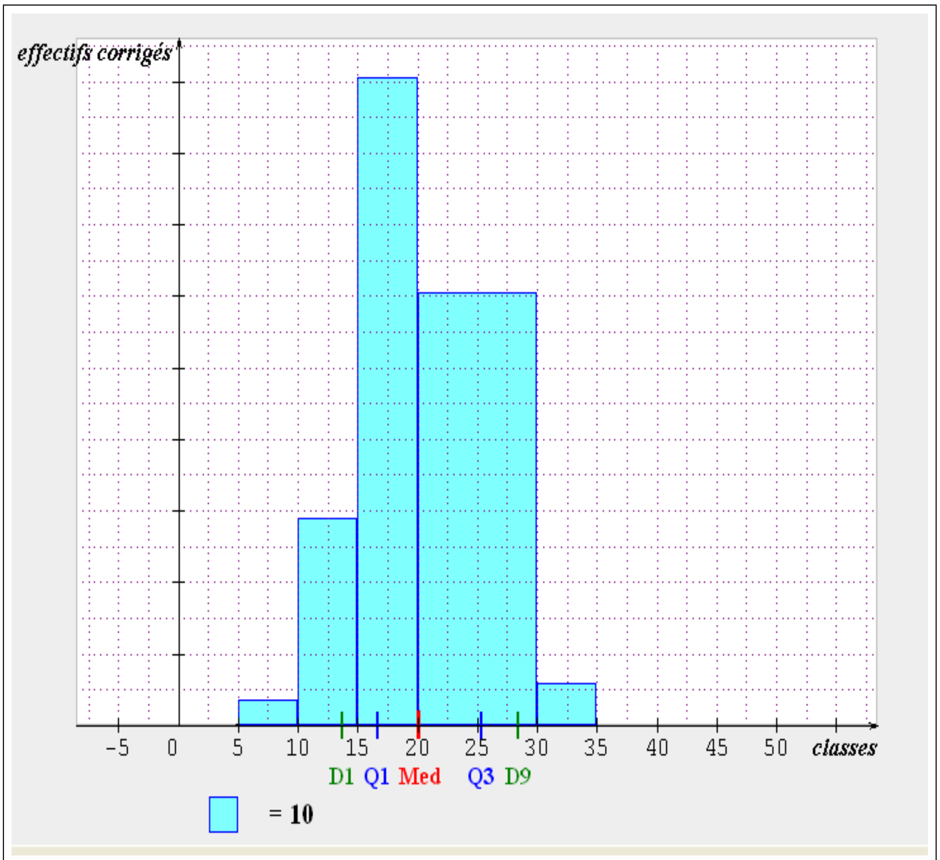
I EXERCICE-1

1. Le revenu médian des français, M_e est donné par : $0.60 M_e = 910$ soit $M_e = \dfrac{910}{0.60} = 1516.67$ €. 50% des français ont un revenu mensuel inférieur ou égal à 1516.67 €.
2. L'écart inter-décile est : $D9 - D1 = 33900 - 10010 = 23890$ €. Le pourcentage de français situé dans cette fourchette de revenus est de 80%.
3. La variance :

   Définition : $\boxed{V(x) = \sum f_i (x_i - \overline{x})^2}$ formule développée : $\boxed{V(x) = \sum f_i x_i^2 - \overline{x}^2}$ (moyenne des carrés moins carré de la moyenne : $MC - CM$)

II EXERCICE-2

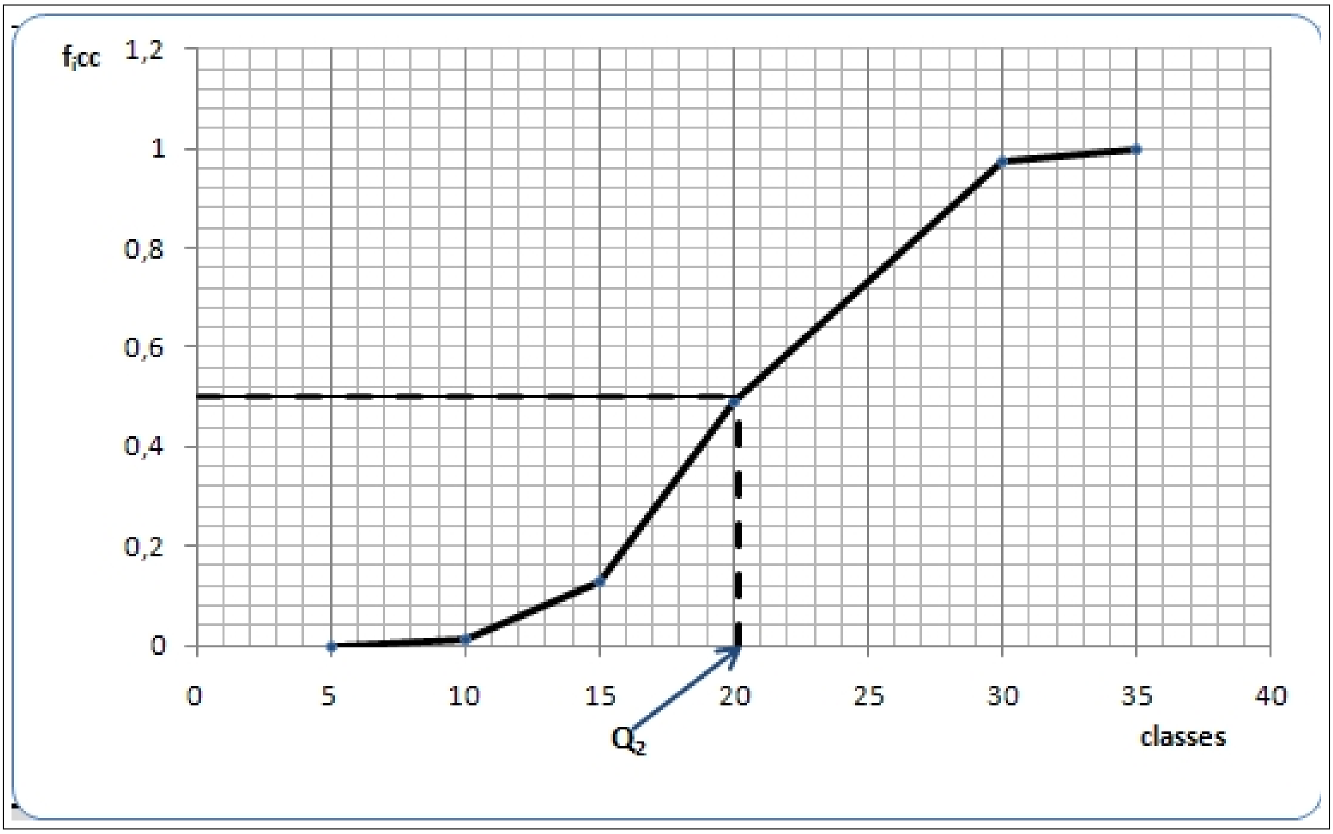
1. La représentation de cette série représentant les données relatives à un caractère quantitatif continu est un histogramme ; les classes étant d'amplitude inégale, on a utilisé la densité, $d_i = \dfrac{n_i}{A_i}$ et les effectifs corrigés $n_{icor} = 5d_i$, 5 étant l'amplitude minimale de classe.



a_i	b_i	x_i	n_i	A_i	d_i	$n_i cor$	$n_i cc$	$f_i cc$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
5	10	7.5	7	5	1.4	7	7	0.014	52.5	393.75
10	15	12.5	58	5	11.6	58	65	0.13	725	9062.5
15	20	17.5	181	5	36.2	181	246	0.492	3167.5	55431.3
20	30	25	242	10	24.2	121	488	0.976	6050	151250
30	35	32.5	12	5	2.4	12	500	1	390	12675
			500						10385	228813

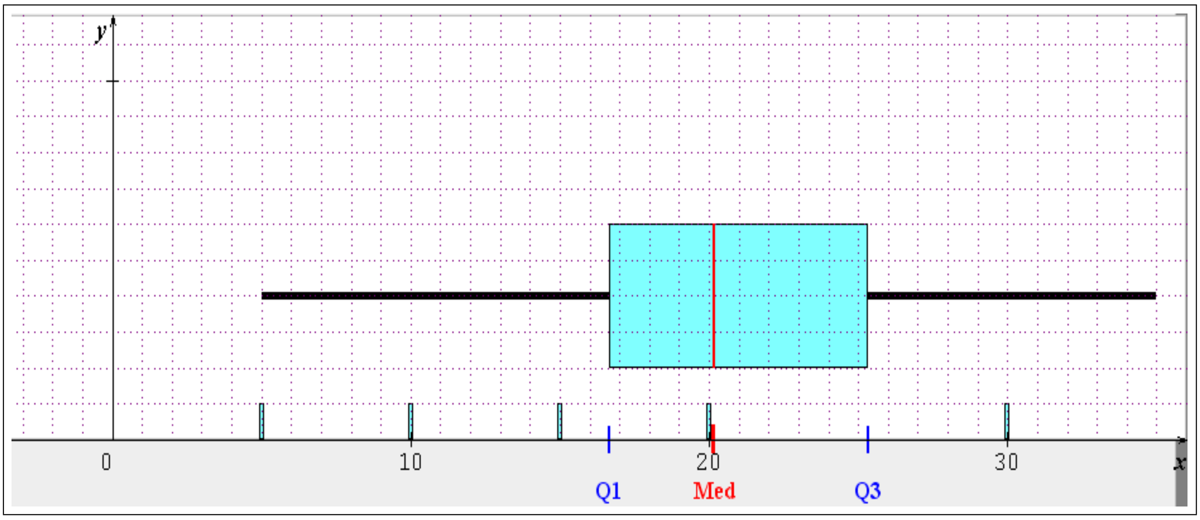
2. La classe modale est celle de plus grande densité, c'est-à dire la classe $[15; 20[$ et le mode est calculé en considérant les classes encadrant la classe modale, ce qui donne avec les notations du cours : $\begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} h = 181 \\ h_1 = 58 \text{ et } h_2 = 121 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1 = h - h_1 = 123 \\ k_2 = h - h_2 = 60 \end{cases}$
et pour conclure :
$M_o = \dfrac{k_2 x_1 + k_1 x_2}{k_2 + k_1} = \dfrac{15 * 60 + 20 * 123}{183} \simeq \boxed{18.36}$; comme prévu, le mode est plus grand que 17.5, le centre de la classe modale, car il est attiré par la classe de droite.

3. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes et donner graphiquement une estimation de la médiane.



Ce graphique permet d'estimer la médiane à environ : $\boxed{M_e \simeq 20.1}$, en prenant l'intersection du polygone des effectifs cumulés croissants avec la droite horizontale : $y = 0.50$.

4. On donne $Q_1 = 16.66$ et $Q_3 = 25.33$; pour la boîte à moustaches nous devons calculer $EIQ = Q_3 - Q_1 = 25.33 - 16.66 = 8.67$ et $1.5EIQ = 1.5 * 8.67 = 13.01$, taille maximale des moustaches ; par ailleurs calculons : $Q_1 - 5 = 16.66 - 5 = 11.66$ et $35 - Q_3 = 35 - 25.33 = 9.67$; aucune des moustaches n'exède $1.5EIQ$, il n'y pas de correction à effectuer.



5. Le tableau statistique permet de calculer $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{10385}{500} = 20.77$; $V(x) = \frac{228813}{500} - 20.77^2 = \boxed{26.23}$ et $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \simeq \sqrt{26.23} \simeq \boxed{5.12}$.
6. On a : $\overline{x} = 20.77$, $M_o \simeq 18.36$ et $M_e \simeq 20$, soit : $M_o < M_e < \overline{x}$, ce qui traduit un étalement à droite, en cohérence avec la boîte à moustaches.
7. Caractère y
   a. On sait que : si $y = ax + b$, $\overline{y} = a\overline{x} + b$, $V(y) = a^2 V(x)$ et $\sigma(y) = |a|\,\sigma(x)$. Ici on a :
   $y = 0.90x$ donc on en déduit : $\overline{y} = 0.90\overline{x} = 0.9 * 20.77 = \boxed{18.69}$ et $\sigma(y) = 0.90 * 5.12 = \boxed{4.61}$.
   b. $CV(y) = \frac{\sigma(y)}{\overline{y}} = \frac{0.90\sigma(x)}{0.90\overline{x}} = \frac{\sigma(x)}{\overline{x}} = \frac{5.12}{20.77} = 0.246\,5$ soit $\boxed{24.65\%.}$ Les caractères x et y ont la même dispersion relative ; une variation en pourcentage ne modifie pas le coefficient de variation.
8. On estime maintenant que le temps moyen de livraison d'une pizza est de 21 mn avec un écart-type de 5 mn.
   a. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne en statistique une loi empirique : dans un intervalle centré autour de la moyenne, du type $[\overline{x} - k\sigma(x)\,;\overline{x} + k\sigma(x)]$, il y a au moins $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) * 100\%$ d'observations. On doit calculer : $P(13.5 < T < 28.5)$; c'est un intervalle centré sur 21, la moyenne, avec une variation maximale de 7.5 autour de la moyenne, donc d'un écart-type et demi ; pour $k = 1.5$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous indique qu'il y a au moins $\left(1 - \frac{1}{1.5^2}\right) * 100 \simeq \boxed{55.56\%}$ des observations, donc que $P(13.5 < T < 28.5) \geq 0.5556$.
   b. La loi normale
      i. On calcule cette probabilité en standardisant la variable aléatoire, c'est-à dire en se ramenant à la loi normale centrée réduite. On pose $Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-21}{5}$, où m et σ désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de X, alors Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On obtient : $P(13.5 < T < 28.5) = P\left(\frac{13.5-21}{5} \leq Z \leq \frac{28.5-21}{5}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) = 2F(1.5) - 1 \simeq 2 * 0.9332 - 1 = \boxed{0.866\,4}$, où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, dont les valeurs sont lues dans la table ; on lit $F(1.5) = 0.9332$.
      ii. On doit calculer : $P(T > 25) = 1 - P(T \leq 25) = 1 - P\left(Z \leq \frac{25-21}{5}\right) = 1 - F(0.8) \simeq 1 - 0.7881 = 0.211\,9$ soit $\boxed{21.19\%}$. Sur l'échantillon observé, la fréquence des pizzas livrées en plus de 25 min est de : $\frac{121+12}{500} = 0.266$ soit 26.6%.