EXERCICES DE PROBABILITES CONDITIONNELLES

1. Exercice1

	LETTRES	
Etudiants	Inscrits	Reçus
Garçons	100	50
Filles	400	200
Total	500	250

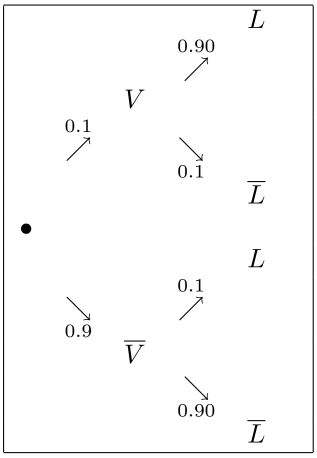
a. On peut noter R et F les événements "être reçu" et "être une fille" On peut comparer : $P(R)$ et $P(R/F)$; $P(R) = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ et $P(R/F) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$; $P(R) = P(R/F)$, il y a donc indépendance.

b. En sciences, on trouve : $P(R) = \frac{480}{600} = \frac{4}{5}$ et $P(R/F) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$; $P(R) = P(R/F)$, il y a donc indépendance.

c. Sur l'ensemble de l'université on trouve : $P(R) = \frac{730}{1100} = \frac{73}{110} \simeq 0.6636$ et $P(R/F) = \frac{280}{500} = 0.56$

On trouve : $P(R) \neq P(R/F)$; les événements sont donc dépendants; il y a en proportion moins de reçus chez les filles Peut-on pour autant taxer cette université de sexisme? non, il s'agit d'un effet de structure ; la probabilité d'être reçu en science est la même pour une fille que pour un garçon, et de même en lettre; il se trouve que la probabilité d'être reçu en sciences est bien plus forte qu'en lettre et que les filles sont majoritairement inscrites en lettre et les garçons en sciences ; c'est ce qui explique la dépendance des événements sur l'ensemble de l'université.

2. Le detecteur



a. On a représenté la situation par un arbre; on a désigné par V l'événement : "*être voleur*" et par L : "être licencié " Calculons : $P_L(V) = P(V/L) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{P(V)\,P(L/V)}{P(L)}$

on se trouve en présence du théorème de Bayes ; on retrouve au dénominateur $P(L) = P(V)\,P(L/V) + P(\overline{V})\,P(L/\overline{V}) = 0.1 * 0.9 + 0.9 * 0.1 = 0.18$, calculé par le théorème des probabilités totales. $P(L/V)\,P(V) = 0.1 * 0.9 = 0.09$; on trouve finalement : $P_L(V) = \frac{0.09}{0.18} = \boxed{0.5}$; celà signifie qu'il y a 50% de voleurs parmi les licenciés, donc 50% "d'innocents"!!!

b. On reprend le calcul dans le cas général avec $P(V) = p$, on a alors : $P_L(V) = \frac{P(V)\,P(L/V)}{P(L)} = \frac{0.9p}{0.9p + 0.1(1-p)} = \frac{0.9p}{0.8p + 0.1} = \boxed{\frac{9p}{8p+1}}$, ce qui donne :

p	$0,1$	$0,05$	$0,01$	$0,001$
r	$\frac{9 * 0.1}{8 * 0.1 + 1} = 0.5$	0.3214	8.33×10^{-2}	8.9×10^{-3}

il faut donc rester très prudent pour les phénomènes rares, car on voit que même avec un test de très bonne fiabilité, si $P(V)$ est faible, la probabilité r devient très faible, pour tomber à moins de 1% pour $p = 0.001$.

3. Urne

a. A : "trois boules de même couleur " donc $A = B \cup C$, avec B : "3 rouges" et C : "3 bleues". Les événements B et C sont incompatibles, on applique donc l'axiome de Kolmogorov : $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{\binom{7}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{9}{44} \simeq 0.2045$.

b. Indépendance (tirages successifs) : $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \left(\frac{7}{12}\right)^3 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 = \frac{13}{48} \simeq 0.2708$

4. Le texte a été mal rédigé ; la question est à traiter pour $n = 2$, puis $n = 3$.
   a. $n = 2$, $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ donc $P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$: les événéménts sont **dépendants.**
   b. $n = 3$, A signifie 2 pile et 1 face ou le contraire, ce qui donne : $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (2 pile ou 3 pile) et $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ donc $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$: les événéménts sont **indépendants.**

5. L'univers est : $\Omega = \{G; F\}^2$ et $Card\Omega = 4$. Soit A l'événement : "un des enfants est une fille " et B l'événement : "un des enfants est le roi " ; on doit calculer : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{2}{3}}$, car $A \cap B =\{(G; F); (G; F)\}$ et B signifie qu'il y a au moins un garçon, donc : $B = \{(G; F); (G; F); (G; G)\}$;

6. To be or not to be...
   a. On peut noter X la variable aléatoire désignant le nombre de cadres encore présents dans 5 ans, il est clair que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0.70)$; en effet, on est en présence d'un schéma de Bernoulli, puisque l'on répète 6 fois de suite, de façons indépendantes, une expérience de Bernoulli, c'est-à dire ayant deux issues, succès avec la probabilité p et échec avec la probabilité $q = 1 - p$.

      Rappel : $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}}$, pour $k \in \{0; 1; 2...; n\}$; ici on a noté succès, l'événement " le cadre est encore présent dans l'entreprise ".

      $P(X = 6) = C_6^6 0.7^6 * 0.3^0 = 0.7^6 \simeq \boxed{0.117\,6}$
   b. On cherche : $P(X = 2) = \binom{6}{2} 0.7^2 * 0.3^4 \simeq \boxed{0.059\,5}$

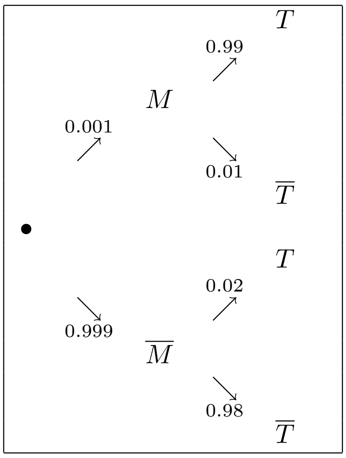
7. $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ et $A \cap B = \emptyset$; $P(A \cap B) = 0$ et d'autre part : $P(A) * P(B) \neq 0$; on en déduit que ces deux événements disjoints sont dépendants.exemple : A : "on est dans un mois de 31 jours" et B : "on est en février".

8. Le tableau:
   a. Cas 1 : on va calculer $P(A \cap B)$ et comparer avec le produit $P(A) * P(B)$;

      utilisons la formule de Poincaré :$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ce qui donne :

      $P(A \cap B) = 0.1 + 0.9 - P(A \cup B) = 1 - 0.91 = 0.09$ et $P(A) * P(B) = 0.1 * 0.9 = 0.09$; l'égalité prouve l'indépendance.
   b. Cas 2 : $P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.76 = 0.24$ et $P(A) * P(B) = 0.4 * 0.6$; indépendance.
   c. Cas 2 : $P(A \cap B) = 0.5 + 0.3 - 0.73 = 0.07$ et $P(A) * P(B) = 0.5 * 0.3 = 0.15$; A et B sont dépendants.

9. Les tests médicaux
   a. Si l'on note $M\ et\ T$ les événements "être malade" et "avir un test positif", on a : $P(T \cap M) = P(M) * P_M(T) = 0.001 * 0.99 = 0.00099$;



      On a représenté la situation par un arbre;
   b. $P_T(M)$; on se trouve en présence du théorème de Bayes :

$P_T(M) = \dfrac{P(M) * P_M(T)}{P(M) * P_M(T) + P(\overline{M}) * P_{\overline{M}}(T)} = \dfrac{0.00099}{0.00099 + 0.999 * 0.02} \simeq \boxed{0.0\,472}$ on retrouve au dénominateur $P(T) \simeq 0.0\,209\,7$, calculé par le théorème des probabilités totales.Le résultat est extrêmement faible, de l'ordre de 4.7%.il faut donc rester très prudent pour les phénomènes rares ($P(M)$ est ici 0.001), car même avec un test de très bonne fiabilité, la plupart des alarmes sont de fausses alarmes.

10. Ne pas traiter
11. Ne pas traiter
12. To Be.......
    a. On a repéré un schéma de Bernoulli : répétition de n expériences identiques de Bernoulli (succès ou échec), indépendantes ; on sait que si X est la variable aléatoire désignant le nombre de succès à l'issue des n épreuves, X suit la loi binomiale : $\mathcal{B}(n;p)$ définie par : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k \in \{0;1;2;..;n\}$; ici $n = 10, p = 0.10$ et $k = 3$, on trouve donc : $P(X=3) = \binom{10}{3} 0.1^3 * 0.9^7 = 120 * 0.001 * 0.729 = 0.0\,874\,8$

    b. Soit A l'événement : on a atteint au moins une fois une nappe de pétrole après n essais ; exprimons $P(\overline{A}) = \binom{n}{0} 0.1^0 * 0.9^n = 0.9^n$; alors $P(A) = 1 - 0.9^n$ et on doit résoudre :

    $P(A) \geq 0.50 \Leftrightarrow 1 - 0.9^n \geq 0.50 \Longleftrightarrow 0.9^n \leq 0.50 \Leftrightarrow n \log 0.9 \leq \log 0.50$ soit $n \geq \dfrac{\log 0.50}{\log 0.9}$ car $\log 0.9 < 0$; on obtient finalement : $n \geq 7$ car n est un entier.