I EXERCICE-1

1. Notons E l'événement "A quitte l'entreprise" et F,l'événement "B quitte l'entreprise" ; on cherche $P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)$, or $\overline{E}\cap\overline{F}=\overline{E\cup F}$,donc $P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)=1-P\left(E\cup F\right)=1-0.3=\boxed{0.7}$
2. Pour tester l'indépendance des événements E et F,on peut comparer $P\left(E\cap F\right)$ et $P\left(E\right)*P\left(F\right)$; appliquons la formule de Poincaré, qui donne : $P\left(E\cup F\right)=P\left(E\right)+P\left(F\right)-P\left(E\cap F\right)$,ou $P\left(E\cap F\right)=P\left(E\right)+P\left(F\right)-P\left(E\cup F\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-0.3=0.025$; par ailleurs, $P\left(E\right)*P\left(F\right)=\frac{1}{5}*\frac{1}{8}=0.025$. On a :

   $$\boxed{\text{P}(E\cap F)\text{=P}(E)\text{*P}(F)}$$

   Les événements E et F sont donc indépendants .

   Remarque : on peut aussi calculer $P\left(E/F\right)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{0.025}{\frac{1}{8}}=0.2=P\left(E\right)$, ce qui prouve l'indépendance de E et F.

II EXERCICE-3$(4pts)$

1. $$\begin{array}{ccccc}
 & & & & R\\
 & & & \overset{0.10}{\nearrow} & \\
 & & X & & \\
 & & & \underset{0.90}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R}\\
 & \overset{0.35}{\nearrow} & & & \\
 & & & & R\\
 & & & \overset{0.40}{\nearrow} & \\
\star & \xrightarrow{0.40} & Y & & \\
 & & & \underset{0.60}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R}\\
 & \underset{0.25}{\searrow} & & & \\
 & & & & R\\
 & & & \overset{0.82}{\nearrow} & \\
 & & Z & & \\
 & & & \underset{0.18}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R}
\end{array}$$
2. On cherche : $P_R\left(Y\right)=\dfrac{P\left(Y\cap R\right)}{P\left(R\right)}$. Il s'agit clairement du théorème de Bayes, théorème des probabilités des causes : $P_R\left(Y\right)=\dfrac{P\left(Y\cap R\right)}{P\left(R\right)}=\dfrac{P\left(Y\right)*P_Y\left(R\right)}{P\left(R\right)}$.On va utiliser **le théorème des probabilités totales** pour calculer $P\left(R\right)$ **;** il est clair que les événements X, Y et Z forment une partition de l'univers ; on a donc :
   $P\left(R\right)=P\left(X\right)*P_X\left(R\right)+P\left(Y\right)*P_Y\left(R\right)+P\left(Z\right)*P\left(R/Z\right)$ soit $P\left(R\right)=0.35*0.10+0.40*0.40+0.25*0.82=0.40$.
   Par ailleurs $P\left(Y\cap R\right)=P\left(Y\right)*P_Y\left(R\right)=0.40*0.40=0.16$; on en déduit : $P_R\left(Y\right)=\dfrac{0.16}{0.40}=\boxed{0.40}$.

III EXERCICE-4

1. loi binomiale
   a. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli ; en effet, la transcription d'un caractère est une expérience de Bernoulli ; on a deux issues :S =Succès : " le caractère n'est pas transcrit correctement", avec $P\left(S\right)=p=0.005$ et $\overline{S}=$ Echec, avec $P\left(\overline{S}\right)=1-p=q=0.995$.On répète, de façons indépendantes, 1000 expériences identiques ; on sait que le nombre X de succès suit la loi $\mathcal{B}\left(n;p\right)$, avec $n=1000$ $P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, ce qui donne :
   $$P\left(X=4\right)=\binom{1000}{4}*0.005^4*0.995^{996}=\frac{1000*999*998*997}{24}*0.005^4*0.995^{996}\simeq\boxed{0.1757}$$
   b. $P\left(X\geq1\right)=1-P\left(X=0\right)=1-0.995^{1000}\simeq\boxed{0.9933}$

2. On doit calculer $E(X) = np = 1000 * 0.005 = 5$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 * 0.005 * 0.995} \simeq 2.23$. On rappelle que celà signifie que l'on doit s'attendre, en moyenne à 5 caractères transcrits incorrectement, avec une fluctuation moyenne de ce nombre autour de sa moyenne de 2.23;
3. Approximation
   a. Les conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson sont : $\boxed{\mathbf{n > 50 \text{ et } p < 0.1} \text{ avec } np \leq 5}$. Ici $n = 1000$, $p = 0.005$ et $np = 5$; les conditions sont donc réunies et $\mathcal{B}(n;p) \simeq \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ soit ici $\mathcal{P}(5)$.
   b. $E(X) + \sigma(X) \simeq 7.23$
   $E(X) - \sigma(X) \simeq 5 - 2.23 = 2.77$. on en déduit que $\{E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X)\} = \{X \in [|3;7|]\}$
   $P(E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X)) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$
   soit $\frac{5^3}{3!}e^{-5} + \frac{5^4}{4!}e^{-5} + \frac{5^5}{5!}e^{-5} + \frac{5^6}{6!}e^{-5} + \frac{5^7}{7!}e^{-5} = e^{-5}\left(\frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!}\right) \simeq \boxed{0.7420}$