CORRIGE DE L'EXAMEN BLANC DE PROBABILITE

I EXERCICE 1 $(2_{\textbf{pts}})$

1. On doit effectuer un changement de variable, pour se ramener à la loi normale centrée réduite ; on pose : $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 32.3}{8.5}$ et on sait que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(32.3; 8.5)$ alors $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.$P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 40)$, ce qui donne :
$P(X \geq 40) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{40 - 32.3}{8.5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{7.7}{8.5}\right) = 1 - F\left(\dfrac{7.7}{8.5}\right) \simeq 1 - F(0.91) \simeq 1 - 0.8186 = 0.181\,4$ soit environ 18.14%.

2. $P(25 \leq X \leq 40) = P\left(\dfrac{25 - 32.3}{8.5} \leq Z \leq \dfrac{40 - 32.3}{8.5}\right) = F(0.91) - F(-0.86) = F(0.91) - (1 - F(0.86)) = F(0.91) + F(0.86) - 1 = 0.8186 + 0.8051 - 1 = \boxed{0.623\,7}$

II EXERCICE-2

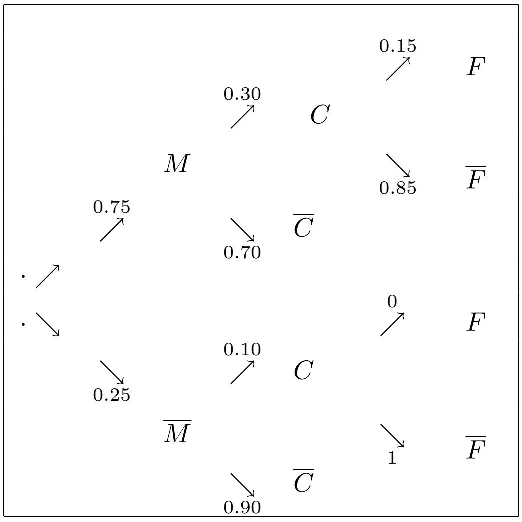
1. Loi de probabilité
   a. On se retrouve devant un **schéma de Bernoulli, c'est-à dire la répatition de façons identiques et indépendantes d'expérience de bernoulli (succès, échec).** Si on désigne par X le nombre de lecteurs ayant trouvé la faute, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(500000\,;0.00001)$. On a $P(X = k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, avec $p = 0.00001$, probabilité d'un "succès" et $q = 1 - p$, k variant de 0 à n.
   $P(X = k) = \binom{500000}{k} 0.00001^k * 0.99999^{500000-k}$.

   b. $E(X) = np = 500000 * 0.00001 = \boxed{5.}$

2. La loi de Poisson peut constituer une approximation interressante de la loi binomiale. On prend alors $\lambda = E(X) = np$
On obtient alors en utilisant pour une loi de Poisson de paramètre 5, la formule :
$\boxed{P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}}$ soit $P(X = 3) = e^{-5} * \dfrac{5^3}{3!} \simeq \boxed{0.140\,4;}$

3. $P(X > 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3))$ en utilisant l'événement contraire. soit
$P(X > 3) = 1 - e^{-5}\left(1 + \dfrac{5^1}{1!} + \dfrac{5^2}{2!} + \dfrac{5^3}{3!}\right) = 1 - \frac{118}{3} e^{-5} \simeq \boxed{0.7350}$

III .EXERCICE-3$(2.5_{\textbf{pts}})$

1. 

On nomme respectivement M, C et F les événements : "avoir moins de 40 ans", "être cadre" et "être une femme".

2. On doit calculer P(C) , on va utiliser le théorème des probabilités totales :
$P(C) = P(M)\,P_M(C) + P(\overline{M})\,P_M(\overline{C}) = 0.75 * 0.30 + 0.25 * 0.10 = \boxed{0.25}$

3. $P_F(C) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(F)} = \dfrac{0.15 * 0.3 * 0.75}{0.55} = \boxed{6.14 \times 10^{-2}}$

IV EXERCICE 4(3.5pts)

1. On est en présence d'un schéma de Bernoulli et X , le nombre de décès suit la loi $\mathcal{B}(10000\ ;\ 0.01)$. Son espérance est $E(X) = np = 10000 * 0.01 = 100$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 * 0.01 * 0.99} \simeq 9.95$

2. $npq = 99 > 18$, on peut approcher la loi Binomiale par une loi normale, la loi $\mathcal{N}(100\ ;\ 9.95)$; la loi binomiale étant une loi discrète, on effectue une correction de continuité. $P(X = 100) \simeq P(99.5 \leq X \leq 100.5) = P\left(\frac{99.5 - 100}{9.95} \leq Z \leq \frac{100.5 - 100}{9.95}\right)$ soit : $F\left(\frac{0.5}{9.95}\right) - F\left(-\frac{0.5}{9.95}\right) = 2F(0.05) - 1 \simeq 2 * 0.5199 - 1 \simeq \boxed{0.0398}$ avec $Z = \frac{X - 100}{9.95}$ et $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$.
   $P(X \geq 97) = P(X \geq 96.5) = P\left(Z \geq \frac{96.5 - 100}{9.95}\right) = P(Z \geq -0.35) = P(Z \leq 0.35) = F(0.35) \simeq \boxed{0.6368}$

3. $Y = 100000X$; on en déduit par linéarité : $E(Y) = 100000E(X) = \boxed{10\,000\,000}$; pour la variance on a : $V(aX) = a^2V(X)$ donc ici : $V(Y) = 100000^2V(X) = 100000^2 * 99 = \boxed{990\,000\,000\,000 = 9.9 * 10^{11}}$
   et $\sigma(Y) = \sqrt{990\,000\,000\,000} \simeq 994987.44$