L3-Novembre 2011 CORRIGE CONTRÔLE CONTINU A

1 EXERCICE-1

1. $$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{0.40}{\nearrow} & A \\ & & R & & \\ & \overset{0.30}{\nearrow} & & \underset{0.60}{\searrow} & \overline{A} \\ \bigstar & & & & \\ & \underset{0.70}{\searrow} & & \overset{0.20}{\nearrow} & A \\ & & \overline{R} & & \\ & & & \underset{0.80}{\searrow} & \overline{A} \end{array}$$

   On note respectivement A et R les événements "avoir un accident" et "être un client à risque".
   On va utiliser **le théorème des probabilités totales** pour calculer $P(A)$
   $P(A) = P(R) * P_R(A) + P(\overline{R}) * P_{\overline{R}}(A)$
   soit $P(A) = 0.30 * 0.40 + 0.70 * 0.20 = 0.26$

2. Il s'agit du théorème de Bayes : $P_A(R) = \dfrac{P(R) * P_R(A)}{P(A)} = \dfrac{0.30 * 0.40}{0.26} = \boxed{0.461\,5}$

3. Loi de X
   a. On a la répétition 40 fois, d'une expérience de Bernoulli, de façons identiques et indépendantes, on a donc les conditions d'un schéma de Bernoulli. X, la variable aléatoire représentant le nombre de succès (client à risque), suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0.30)$ .On a pour k entier, $k \in [0\,;40]$: $P(X = k) = \binom{40}{k} 0.30^k * 0.70^{40-k}$

   b. $P(X = 16) = \binom{40}{16} 0.30^{16} * 0.70^{24} = 5.18 \times 10^{-2}$ et $P(X = 20) = \binom{40}{20} 0.30^{20} * 0.70^{20} = 3.8 \times 10^{-3} = 0.003\,8$

4. Loi de X
   a. Loi normale
      i. $E(X) = np = 200 * 0.30 = \boxed{60}$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{200 * 0.3 * 0.7} = \boxed{6.\,48}$; on approche la loi de probabilité de X par la loi normale $\mathcal{N}(60\,; 6.48)$. On note Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(60\,; 6.48)$.

      ii. On approche une loi discrète par une loi continue, on doit procéder à une correction de continuité : $P(X = 60) = P(59.5 \leq Y \leq 60.5) = P\left(\dfrac{59.5 - 60}{6.48} \leq Z \leq \dfrac{60.5 - 60}{6.\,48}\right) = P(-0.08 \leq Z \leq 0.08) = 2F(0.08) - 1 = 2 * 0.5319 - 1 = \boxed{0.063\,8}$

      $P(X \leq 70) = P(Y \leq 70.5) = P\left(Z \leq \dfrac{70.5 - 60}{6.48}\right) \simeq P(Z \leq 1.62) = F(1.62) = \boxed{0.9474}$

      $P(50 < X < 70) = P(51 \leq X \leq 69) = P(50.5 \leq Y \leq 69.5) = P\left(\dfrac{50.5 - 60}{6.48} \leq Z \leq \dfrac{69.5 - 60}{6.\,48}\right) = P(-1.47 \leq Z \leq 1.47) = 2F(1.47) -$

$1 = 2 * 0.9292 - 1 = \boxed{0.858\,4}$

2 EXERCICE-2.

1. Si X suit une loi continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; la fonction de densité est définie par :

   $\boxed{\left\{ \begin{array}{c} f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; a\right[\cup \left]b; +\infty\right[\end{array} \right.}$ soit ici : $\left\{ \begin{array}{c} f(x) = 1 \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{array} \right.$

   Par ailleurs, la fonction de répartition est définie par : $\left\{ \begin{array}{l} F(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} = x + \frac{1}{2} \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ F(x) = 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{array} \right.$,

2. $P(A) = F(0.2) = 0.2 + 0.5 = \boxed{0.70}$, $P(B) = P(X \geq 0.4) = 1 - F(0.4) = 1 - (0.9) = 0.1$ et $P(C) = P\{-0.35 \leq X \leq 0.2\} = F(0.2) - F(-0.35) = 0.70 - \left(-0.35 + \frac{1}{2}\right) = 0.55$

3 EXERCICE-3

1. Le théorème central limite permet d'affirmer que la distribution de la moyenne d'échantillon tend vers une loi normale au fur et à mesure que la taille n de l'échantillon augmente,

   et ce sans aucune hypothèse sur la loi parente (loi de la population). Si la loi parente a m pour moyenne et σ pour écart-type, la moyenne d'échantillon de taille n, notée $\overline{X}_n$, suit approximativement la loi $N\left(m\,; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Désolé, il manque la valeur de n,la taille de l'échantillon.....

4 EXERCICE-4

1. $E(X) = V(X) = \lambda = 12.$

2. $P(X = 12) = \frac{12^{12}}{12!} e^{-12} = 0.114\,4$

   $P(10 \leq X \leq 13) = e^{-12}\left(\frac{12^{10}}{10!} + \frac{12^{11}}{11!} + \frac{12^{12}}{12!} + \frac{12^{13}}{13!}\right) = 0.4391$