L3-Novembre 2011 CORRIGE CONTRÔLE CONTINU B

1 EXERCICE-1

1. $E(X) = V(X) = \lambda = 5$.et $\sigma(X) = \sqrt{5} = 2.24$
2. $P(X=6) = \dfrac{5^6}{6!}e^{-5} = 0.146\,2$

   $P(X \geq 4) = 1 - e^{-5}\left(1 + \dfrac{5}{1!} + \dfrac{5^2}{2!} + \dfrac{5^3}{3!}\right) = 0.7350$

2 EXERCICE-2.

1. Si X suit une loi continue sur $[-0.4; 0.5]$; la fonction de densité est définie par :
   $\boxed{\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; a\right[\cup \left]b; +\infty\right[\end{cases}}$ soit ici : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{0.9} \simeq 1.11 \text{ si } x \in [-0.4; 0.5] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; -0.4\right[\cup \left]0.5; +\infty\right[\end{cases}$

   Par ailleurs, la fonction de répartition est définie par : $\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x \in \left]-\infty; -0.4\right[\\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \dfrac{x+0.4}{0.9} \text{ si } x \in [-0.4; 0.5] \\ F(x) = 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{cases}$,
2. $P(A) = F(0.3) = \dfrac{0.3+0.4}{0.9} = \dfrac{0.7}{0.9} = \boxed{0.777\,8}$, $P(B) = P(X \geq 0.4) = 1 - F(0.4) = 1 - \dfrac{0.8}{0.9} = 0.111\,1$ et

   $P(C) = P\{-0.3 \leq X \leq 0.25\} = F(0.25) - F(-0.3) = \dfrac{0.65}{0.9} - \dfrac{0.1}{0.9} = \dfrac{0.55}{0.9} = 0.611\,1$

3 EXERCICE-3

1. Le théorème central limite permet d'affirmer que la distribution de la moyenne d'échantillon tend vers une loi normale au fur et à mesure que la taille n de l'échantillon augmente,

   et ce sans aucune hypothèse sur la loi parente (loi de la population). Si la loi parente a m pour moyenne et σ pour écart-type, la moyenne d'échantillon de taille n, notée $\overline{X}_n$, suit approximativement la loi $N\left(m\,;\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Désolé, il manque la valeur de n,la taille de l'échantillon.....

4 EXERCICE-4

1. $$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{0.50}{\nearrow} & A \\ & & R & & \\ & \overset{0.40}{\nearrow} & & \underset{0.50}{\searrow} & \overline{A} \\ \star & & & & \\ & \underset{0.60}{\searrow} & & \overset{0.30}{\nearrow} & A \\ & & \overline{R} & & \\ & & & \underset{0.70}{\searrow} & \overline{A} \end{array}$$

   On note respectivement $A \; et \; R$ les événements "avoir un accident" et "être un client à risque".
   On va utiliser **le théorème des probabilités totales** pour calculer $P(A)$
   $P(A) = P(R) * P_R(A) + P(\overline{R}) * P_{\overline{R}}(A)$
   soit $P(A) = 0.50 * 0.40 + 0.60 * 0.30 = 0.38$

2. Il s'agit du théorème de Bayes : $P_A(R) = \dfrac{P(R) * P_R(A)}{P(A)} = \dfrac{0.40 * 0.50}{0.38} = \boxed{0.5263}$

3. Loi de X
   a. On a la répétition 30 fois, d'une expérience de Bernoulli, de façons identiques et indépendantes, on a donc les conditions d'un schéma de Bernoulli. X, la variable aléatoire représentant le nombre de succès (client à risque), suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0.40)$ .On a pour k entier, $k \in [0\,; 30]$: $P(X = k) = \binom{30}{k} 0.40^k * 0.60^{30-k}$
   b. $P(X = 15) = \binom{30}{15} 0.40^{15} * 0.60^{15} = 7.83 \times 10^{-2}$ et $P(X = 14) = \binom{30}{14} 0.40^{14} * 0.60^{16} = 0.110\,1$

4. Loi de X
   a. Loi normale
      i. $E(X) = np = 200 * 0.40 = \boxed{80}$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{200 * 0.4 * 0.6} = 6.93$; on approche la loi de probabilité de X par la loi normale $\mathcal{N}(80\,; 6.93)$. On note Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(80\,; 6.93)$
      ii. On approche une loi discrète par une loi continue, on doit procéder à une correction de continuité : $P(X = 80) = P(79.5 \leq Y \leq 80.5) = P\left(\dfrac{79.5 - 80}{6.93} \leq Z \leq \dfrac{80.5 - 80}{6.93}\right) = P(-0.07 \leq Z \leq 0.07) = 2F(0.07) - 1 = 2 * 0.5279 - 1 = 0.055\,8$:
      $P(X \leq 100) = P(Y \leq 100.5) = P\left(Z \leq \dfrac{100.5 - 80}{6.93}\right) \simeq P(Z \leq 2.96) = F(2.96) = 0.9985$
      $P(65 < X < 95) = P(66 \leq X \leq 94) = P(65.5 \leq Y \leq 94.5) = P\left(\dfrac{65.5 - 80}{6.93} \leq Z \leq \dfrac{94.5 - 80}{6.93}\right) = P(-2.09 \leq Z \leq 2.09) = 2F(2.09) - 1 = 2 * 0.9817 - 1 = 0.963\,4$