UFR14

CORRIGE CONTRÔLE CONTINU B

I Exercice-1

1.
$$\begin{tikzcd} & & T \\ & M \arrow[ur, "0.99"] \arrow[dr, "0.01"'] & \\ \bullet \arrow[ur, "0.001"] \arrow[ddr, "0.999"'] & & \overline{T} \\ & & T \\ & \overline{M} \arrow[ur, "0.02"] \arrow[dr, "0.98"'] & \\ & & \overline{T} \end{tikzcd}$$

On a représenté la situation par un arbre;
on a désigné par M l'événement : "$\hat{e}tre\ malade$"
et par T : "le test est positif".

2. On se trouve en présence du théorème des probabilités totales :
$P(T) = P(M) * P_M(T) + P\left(\overline{M}\right) * P_{\overline{M}}(T) = 0.001 * 0.99 + 0.999 * 0.02 \simeq \boxed{0.021}$

3. On est en présence deu théorème de Bayes (probabilité des causes) : $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M)*P_M(T)}{P(T)} = \dfrac{0.001 * 0.99}{0.021} = 0.0471$

II EXERCICE-2

Soit X la note d'un étudiant, X suit la loi $\mathcal{N}(36.5; 17)$; on se ramène à la loi normale centrée réduite par le changement de variable : posant $Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-36.5}{17}$, $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0\,; 1)$et en utilisant la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, ce qui donne : $P(20 < X < 43) = P\left(\frac{20-36.5}{17} < Z < \frac{43-36.5}{17}\right) = P(-0.95 < Z < 0.38) = F(0.38) - F(-0.95) = F(0.38) - (1 - F(-0.95)) = F(0.38) + F(0.95) - 1 = 0.6480 + 0.8289 - 1 = \boxed{0.476\,9}$

III EXERCICE-3

1. Loi de X
   a. On se trouve devant un schéma de Bernoulli, avec la répétition de façons indépendantes, 30 fois d'une expérience de Bernoulli (2 issues : échec ou succès) ; on note succès :obtenir un vin ordinaire et $p = 0.15$, on sait alors que X suit la loi $B(30; 0.15)$ définie par : $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k * q^{n-k}}$, $k \in \{0\,; 1; ...; 200\}$, $n = 30$ et $q = 0.15$, soit $P(X = k) = \binom{30}{k} * 0.15^k * 0.85^{30-k}$.

   b. $P(X = 25) = \binom{30}{25} * 0.15^{25} * 0.85^5 \simeq 2 \times 10^{-16} \simeq 0$

2. Loi normale
   a. $npq > 18$, on peut donc approximer la loi binomiale par une loi normale . $V(X) = npq = 300 * 0.15 * 0.85. = 38.\,25$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{38.\,25} = 6.\,18$, donc on approche la loi de X par la loi normale $N(38.25; 6.18)$ ses paramètres étant l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.

   b. Si l'on désigne par Y la variable aléatoire suivant la loi $N(38.25; 6.18)$, on a (sans correction de continuité) : $P(X \leq 45) = P(Y \leq 45)$; on standardise en se ramènant à $Z = \dfrac{Y - 38.25}{6.18}$ qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$: $P(Y \leq 45) = P(Z \leq \dfrac{45 - 38.25}{6.18}) = P(Z \leq 1.\,1) = F(1.1) \simeq \boxed{0.8643}$

   De même, $P(35 \leq X \leq 50) = P(\dfrac{35 - 38.25}{6.18} \leq Z \leq \dfrac{50 - 38.25}{6.18}) = P(-0.53 \leq Z \leq 1.90) = F(1.90) - F(-0.53) = F(1.90) - (1 - F(0.53)) = F(1.90) + F(0.53) - 1 \simeq 0.9713 + 0.7019 - 1 = \boxed{0.673\,2}$