L3-AES

CORRIGE DU CONTRÔLE BLANC

Novembre 2010

I EXERCICE-1

1. $A = A^{+} \cup A^{-}$; de plus ces événements sont disjoints $A^{+} \cap A^{-} = \emptyset$, donc d'après l'axiome de Kolmogorov :
   $P(A) = P(A^{+} \cup A^{-}) = P(A^{+}) + P(A^{-}) = 0.328 + 0.072 = \boxed{0.40.}$
2. Par lecture du tableau on a : $P(R^{+} \cap A) = \boxed{0.328}$
3. On cherche : $P_A(R^{+}) = \dfrac{P(R^{+} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.328}{0.40} = \boxed{0.82}$
4. $P(R^{+}) = P(R^{+} \cap A) + P(R^{+} \cap B) + P(R^{+} \cap AB) + P(R^{+} \cap O) = 0.328 + 0.081 + 0.0405 + 0.36 = 0.8095$ donc $P_A(R^{+}) \neq P(R^{+})$; les événements R^{+} et A sont **dépendants.**

II EXERCICE-2

1.
$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & R \\
 & & & \overset{0.35}{\nearrow} & \\
 & & E_1 & & \\
 & & & \underset{0.65}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R} \\
 & \overset{0.20}{\nearrow} & & & \\
 & & & & R \\
 & & & \overset{0.25}{\nearrow} & \\
\bigstar & \overset{0.45}{\longrightarrow} & E_2 & & \\
 & & & \underset{0.75}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R} \\
 & \underset{0.35}{\searrow} & & & \\
 & & & & R \\
 & & & \overset{0.10}{\nearrow} & \\
 & & E_3 & & \\
 & & & \underset{0.90}{\searrow} & \\
 & & & & \overline{R}
\end{array}$$

On va utiliser **le théorème des probabilités totales** pour calculer $P(R)$
il est clair que les événements X, Y et Z
forment une partition de l'univers ; on a donc :
$P(R) = P(E_1) * P(R/E_1) + P(E_2) * P(R/E_2) + P(E_3) * P(R/E_3)$
soit $P(R) = 0.20 * 0.35 + 0.45 * 0.25 + 0.35 * 0.10 = 0.2175$
:

2. On cherche : $P_R(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap R)}{P(R)}$. Par ailleurs $P(E_1 \cap R) = P(E_1) * P_{E_1}(R) = 0.20 * 0.35 = 0.07$; on en déduit : $P_R(E_1) = \dfrac{0.07}{0.2175}. = \boxed{0.3218}$;on utilise en fait le théorème de Bayes.

III EXERCICE 3

1. On est clairement en présence d'un schéma de Bernoulli, avec la répétition 600 fois de façons identiques et indépendantes d'une expérience de Bernoulli ; X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(30; \dfrac{1}{25}\right)$,définie par : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{30}{k} 0.04^k * 0.96^{30-k}$,pour $k \in [|0; 30|]$.
   La loi de probabilité de Y est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(30; \dfrac{1}{25}\right)$
2. $P(X = 8) = \binom{30}{8} 0.04^8 * 0.96^{22} \simeq 1.6 \times 10^{-5}$, $P(X = 9) = \binom{30}{9} 0.04^9 * 0.96^{21} \simeq 1.6 \times 10^{-6}$,pour calculer $P(X \geq 4)$, on utilise l'événement contraire $\{X \leq 3\}$, ce qui donne : $P(X \geq 4) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + PX = 2) + P(X = 3))$,soit
   $P(X \geq 4) = 1 - \left(\binom{30}{0} 0.04^0 * 0.96^{30} + \binom{30}{1} 0.04 * 0.96^{29} + \binom{30}{2} 0.04^2 * 0.96^{28} + \binom{30}{3} 0.04^3 * 0.96^{27}\right) = 3.06 \times 10^{-2}$
3. $E(X) = np = 30 * 0.04. = 1.2$ et l'écart-type par $\sigma(Y) = \sqrt{30 * 0.04 * 0.96} = 1.07$
4. $E(X) - \sigma(X) = 0.13$ et $E(X) + \sigma(X) = 1.27$; X ne prend que des valeurs entières donc entre ces deux valeures, la seule valeure possible est 1,donc : $P(E(X) - \sigma(X) < X < E(X) + \sigma(X)) = P(X = 1) = \binom{30}{1} 0.04 * 0.96^{29} = 0.3673$

IV EXERCICE-4

Soit X le temps nécessaire à un étudiant pour terminer l'épreuve ; X suit la loi $\mathcal{N}(90;15)$; on se ramène à la loi normale centrée réduite par le changement de variable : $Z = \frac{X-90}{15}$ et en utilisant la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, ce qui donne : $P(X<120) = P\left(Z < \frac{120-90}{15}\right) = P(Z<2) = \boxed{0.9772}$ soit 97.72%.

V EXERCICE-5

1. On doit effectuer un changement de variable, pour se ramener à la loi normale centrée réduite ; on pose : $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-32.3}{8.5}$ et on sait que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(32.3;8.5)$ alors $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$.$P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 40)$, ce qui donne : $P(X \geq 40) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{40-32.3}{8.5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{7.7}{8.5}\right) = 1 - F\left(\dfrac{7.7}{8.5}\right) \simeq 1 - F(0.91) \simeq 1 - 0.8186 = 0.181\,4$ soit environ 18.14%.
2. $P(25 \leq X \leq 40) = P\left(\dfrac{25-32.3}{8.5} \leq Z \leq \dfrac{40-32.3}{8.5}\right) = F(0.91) - F(-0.86) = F(0.91) - (1 - F(0.86)) = F(0.91) + F(0.86) - 1 = 0.8186 + 0.8051 - 1 = \boxed{0.623\,7}$

VI EXERCICE-6

1. Loi de probabilité : on a un **schéma de Bernoulli, c'est-à dire la répétition de façons identiques et indépendantes d'expérience de bernoulli (succès, échec).** Si on désigne par X le nombre de lecteurs ayant trouvé la faute, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(500000\ ;0.00001)$.
   On a $P(X=k) = P(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, avec $p = 0.00001$, probabilité d'un "succès" et $q = 1-p$, k variant de 0 à n.
   a. $P(X=k) = \binom{500000}{k}0.00001^k * 0.99999^{500000-k}$.
2. $E(X) = np = 500000 * 0.00001 = \boxed{5.}$

VIIEXERCICE-7

1. On est clairement en présence d'un schéma de Bernoulli, avec la répétition 600 fois de façons identiques et indépendantes d'une expérience de Bernoulli ; XYsuit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(600;\dfrac{1}{25}\right)$,définie par : $P(Y=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \binom{600}{k}0.04^k * 0.96^{600-k}$,pour $k \in [|0;600|]$.
2. $E(Y) = np = 600 * 0.04 = 24$, $V(Y) = npq = 600 * 0.04 * 0.96 = 23.\,04$ et l'écart-type par $\sigma(Y) = \sqrt{600 * 0.04 * 0.96} = 4.\,8$
3. p n'est pas compris entre 0.4 et 0.6,mais la variance npq est supérieure à 18 et Y peut être approchée par une loi normale ; on notera T la variable aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{N}(24;4.\,8)$; On fait un changement de variable en posant $Z = \dfrac{T-24}{4.8}$, Z est une varaible aléatoire centrée réduite qui suit loi $\mathcal{N}(0;1)$; $P(24.5 \leq Y \leq 25.5) = P\left(\dfrac{24.5-24}{4.\,8} \leq Z \leq \dfrac{25.5-24}{4.\,8}\right) = F(0.31) - F(0.10) = 0.6217 - 0.5398 = \boxed{0.0\,819}$, F désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. $P(Y>30) = 1 - P(Y \leq 30) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{30-24}{4.\,8}\right) = 1 - P(Z \leq 1.\,25) = 1 - F(1.25) \simeq 1 - 0.8944 == \boxed{0.105\,6}$,