CORRIGE DE L'EXAMEN DE PROBABILITE

I EXERCICE-1

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ soit ici : $P(X=k)=\dfrac{5^k}{k!}e^{-5}$

$P(X>2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))=1-e^{-5}\left(1+5+\dfrac{5^2}{2!}\right)=1-\dfrac{37}{2}e^{-5}\simeq\boxed{0.875\,3}$

II EXERCICE-2 ($3.pts$

1. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli, car on répète 100 fois, de façons indépendantes, une expérience de Bernoulli ; on appelle "succès", le candidat donne la bonne réponse à une question , avec $p=\dfrac{1}{4}$et q,la probabilité d'un échec, égale à $\dfrac{3}{4}$.On sait alors que le nombre X de succès, suit la loi binomiale $B\left(100;\dfrac{1}{4}\right)$,définie par : $P(X=k)=C_n^k*p^k*q^{n-k}=\boxed{\binom{100}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k*\left(\dfrac{3}{4}\right)^{100-k}}$

2. $P(X=3)=\binom{100}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^3*\left(\dfrac{3}{4}\right)^{97}\simeq\boxed{1.9\times10^{-9}}$

3. $E(X)=np=\boxed{25}$ et $\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{100*0.25*0.75}\simeq\boxed{4.33}$

4. La probabilité de succès est trop grande ($p>0.1$) pour envisager une approximation par la loi des événements rares(Poisson) ; on peut envisager une approximation par la loi normale dans deux cas :
   $\left|\begin{array}{l}0.4<p<0.6\text{(distribution symétrique)}\\ \qquad\qquad avec\, n>50\end{array}\right.$ ou $npq>18$; ici $npq=100*0.25*0.75=18.75$,on peut donc faire une approximation par la loi normale $N(\mu;\sigma)$,où $\mu=25$ et $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{18.75}\simeq4.33$
   l'approximation d'une loi discrète par une loi continue necessite une correction de continuité :
   $P(X=30)=P(29.5<Y<30.5)=P\left(\dfrac{29.5-25}{4.33}<Z<\dfrac{30.5-25}{4.33}\right)\simeq P(1.04<Z<1.27)=F(1.27)-F(1.04)\simeq 0.8980-0.8508\simeq\boxed{0.047\,2}$

   $P(20\le X<30)=P(19.5\le Y<29.5)=P\left(\dfrac{19.5-25}{4.33}<Z<\dfrac{29.5-25}{4.33}\right)=P(-1.27<Z<1.04)=F(1.04)-(1-F(1.27))$
$F(1.04)+F(1.27)-1\simeq0.8980+0.8508-1=\boxed{0.748\,8}$

III EXERCICE-3

1.
$$\boxed{\begin{array}{ccccc}
 & & & \overset{0.2}{\nearrow} & S_1 \quad : \\
 & & H_1 & \overset{0.3}{\longrightarrow} & S_2 \\
 & \overset{0.7}{\nearrow} & & \underset{0.5}{\searrow} & S_3 \\
\cdot\nearrow & & & & \\
\cdot\searrow & & & & \\
 & & & \overset{0.7}{\nearrow} & S_1 \\
 & \underset{0.3}{\searrow} & H_2 & \overset{0.2}{\longrightarrow} & S_2 \\
 & & & \underset{0.1}{\searrow} & S_3
\end{array}}$$

2. $P(S_1)=P(H_1)*P_{H_1}(S_1)+P(H_2)*P_{H_2}(S_1)=0.7*0.2+0.3*0.7=\boxed{0.35}$, en utilisant le théorème des probabilités totales.On obtient de même : $P(S_2)=0.7*0.3+0.3*0.2=\boxed{0.27}$ et $P(S_3)=0.7*0.5+0.3*0.1=\boxed{0.38}$

3. On doit calculer : $P_{S_2}(H_1)=\dfrac{P(H_1\cap S_2)}{P(S_2)}=\dfrac{0.7*0.3}{0.27}=\boxed{0.777\,8}$; il s'agit du théorème de Bayes.

CORRIGE DE L'EXAMEN DE PROBABILITE

IV EXERCICE-4

Le temps d'attente entre deux autobus, exprimé en mn, est une variable aléatoire notée X et suivant une loi uniforme sur $[0.20]$;

1. La fonction de densité de X est donnée par : $\begin{cases} x \in [0;20]\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{20-0} = \dfrac{1}{20} \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
2. Il s'agit de l'espérance, donnée par : $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = 10$
3. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\dfrac{(20)^2}{12}} = \dfrac{10}{3}\sqrt{3} = 5.77$
4. $P(E(X) - \sigma(X) < X < E(X) + \sigma(X)) = P(10 - 5.77 < X < 10 + 5.77) = P(4.23 < X < 15.77) = F15.77) - F(4.23) =$ $\dfrac{15.77}{20} - \dfrac{4.23}{20} = \boxed{0.577}$, en utilisant la fonction de répartition définie par : $\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty;0[\\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [0;20] \\ F(x) = 1 \text{ si } x \in]20;+\infty[\end{cases}$