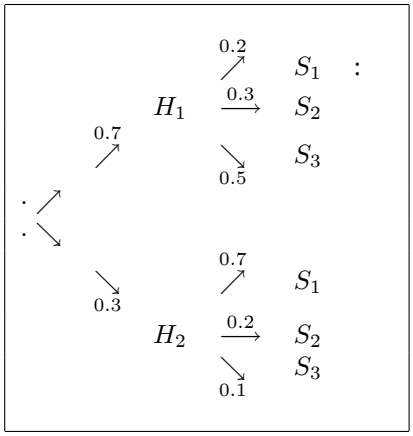
CORRIGE PARTIEL BLANC

L3-AES

Décembre 2013

1 EXERCICE-1

1. 

2. $P\left(S_1\right) = P\left(H_1\right) * P_{H_1}\left(S_1\right) + P\left(H_2\right) * P_{H_2}\left(S_1\right) = 0.7 * 0.2 + 0.3 * 0.7 = \boxed{0.35}$, en utilisant le théorème des probabilités totales.On obtient de même : $P\left(S_2\right) = 0.7 * 0.3 + 0.3 * 0.2 = \boxed{0.27} P\left(S_3\right) = 1 - P\left(S_1\right) - P\left(S_2\right) = 1 - 0.35 - 0.27 = 0.38$

3. On doit calculer : $P_{S_2}\left(H_1\right) = \dfrac{P\left(H_1 \cap S_2\right)}{P\left(S_2\right)} = \dfrac{0.7 * 0.3}{0.27} = \boxed{0.777\,8}$; il s'agit du théorème de Bayes.

2 EXERCICE-2

1.

	X	Y
Moyenne	90.0250	12.0333
Ecart-type	97.9993	1.9345
Variance	9603.8585	3.7422

2. cf tableau ci-dessus

3.

a	b
-0.0083	12.7796

On trouve : $y = -0.0083x + 12.7796$

4. $\widehat{a} = -0.0083$, ceci donne une estimation de la baisse du taux de naissance quand la densité augmente de une unité.

5. $R^2 = 0.1763$, ce coefficient représente la part de la variance de Y expliquée par le modèle. $R^2 = \frac{SCE}{SCT}$.

6. $\widehat{y} = -0.0083 * 173 + 12.7796 = 11.34$

3 EXERCICE-3

1. La moyenne de l'échantillon est estimateur sans biais de la moyenne de la population donc la moyenne de la population est estimée à 6.95 h.

2. Pour l'écart type σ,on l'estime par $S_n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_n = \sqrt{\frac{1003}{1002}} * 1.23 = 1.23$ car S^2 est un estimateur non biaisé de σ^2 ; mais en fait ici l'échantillon étant de taille importante, S_n et σ_n sont presque égaux..L'intervalle de confiance au seuil $1-\alpha$ est donné par : $I = \left]\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}; \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right[$ avec $2F\left(z_{\alpha/2}\right) - 1 = 1-\alpha$, Z suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$;à 95%, on sait que $z_{\alpha/2} = 1.96$, ce qui donne : $I = \left]6.95 - 1.96\frac{1.23}{\sqrt{1003}}; 6.95 + 1.96\frac{1.23}{\sqrt{1003}}\right[$ soit $I =]6.87; 7.03[$ .Il y a une probabilité de 95% pour que cet intervalle contienne le nombre moyen d'heure de sommeil des américains.
3. $2F\left(z_{\alpha/2}\right) - 1 = 0.98$ soit $F\left(z_{\alpha/2}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.99$,ce qui donne par lecture inverse dans la table : $z_{\alpha/2} = 2.33$,soit $I = \left]6.95 - 2.33\frac{1.23}{\sqrt{1003}}; 6.95 + 2.33\frac{1.23}{\sqrt{1003}}\right[$: soit $I =]6.86; 7.04[$ .Il y a une probabilité de 98% pour que cet intervalle contienne le nombre moyen d'heure de sommeil des américains.

4 EXERCICE-4

On effectue un test d'indépendance du Khi^2 au seuil de signification de 5% ; on pose les hypothèses : H_0 : le sexe des deux enfants sont indépendants et l'hypothèse alternative H_1 : il y a une liaison significative entre les deux sexes.

On doit calculer la statistique : $\boxed{\chi^2_{cal} = \frac{(O_1 - C_1)^2}{C_1} + \frac{(O_2 - C_2)^2}{C_2} + ... + \frac{(O_n - C_n)^2}{C_n}}$ qui suit approximativement une loi du khi-deux avec ν degrés de liberté, si l'échantillon est assez grand ($n > 30$). Les effectifs observés sont notés O_i et les effectifs calculés ou théoriques, ceux de l'indépendance C_i .

1. Le calcul du degré de liberté est donné par :$= (l-1)(c-1)$ si l désigne le nombre de lignes et c le nombre de colonnes du tableau $\nu = (l-1)(c-1) = 1 * 1 = 1$.

   Les effectifs théoriques sont calculés sur la base de l'indépendance, en multipliant les effectifs marginaux correspondants et en divisant par l'effectif total, ainsi $C_{11} = \frac{12996 * 12295}{25468} = 6273.98$ .Le duxième tableau donne les contributions au Khi^2, par exemple la première : $\frac{(12 - 14.28)^2}{14.28} \simeq 0.365$.

EFFECTIFS OBSERVES

1er enfant	G	F	Effectifs marginaux
G	**6451**	**6545**	12996
F	**5844**	**6628**	12472
Effectifs marginaux	12295	13173	**25468**

EFFECTIFS THEORIQUES

1er enfant	G	F	Effectifs marginaux
G	**6273.98**	**6722.02**	12996
F	**6021.02**	**6450.98**	12472
Effectifs marginaux	12295	13173	**25468**

Contributions au Khi²

1er enfant	G	F	Sommes
G	4.99	4.66	9.66
F	5.20	4.86	10.06
Sommes	10.20	9.52	**19.72**

On trouve $\chi^2_{cal} \simeq 19.72$. Il reste à appliquer la règle de décision :
si $\chi^2_{cal} \leq \chi^2_{1;0.05}$, alors on ne peut rejeter H_0,donc on ne peut exclure le fait que les caractères sont indépendants.
si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{1;0.05}$, alors on rejete H_0,et on accepte l'hypothèse alternative H_1 : l'existence d'une liaison significative entre les caractères.

Le Khi^2 théorique lu sur la table de : $\chi^2_{1;0.05} = 3.84$; le Khi^2 calculé est supérieur au Khi^2 de la table, l'hypothèse H_0 d'indépendance est rejetée, donc au seuil de 5%, on accepte $H1$, l'existence d'une liaison significative entre les sexes des deux enfants.

5 EXERCICE-5

1. Loi de X

   On se trouve devant un schéma de Bernoulli, avec la répétition de façons indépendantes, 200 fois d'une expérience de Bernoulli (2 issues : échec ou succès) ; on note succès :obtenir un vin ordinaire et $p = 0.12$, on sait alors que X suit la loi $B\left(200; 0.12\right)$ définie par : $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k * q^{n-k}}$, $k \in \{0\ ; 1; ...; 200\}$, $n = 200$ et $q = 0.88$, soit $P(X = k) = \binom{n}{k} * 0.12^k * 0.88^{200-k}$.

   $E\left(X\right) = np = 200 * 0.12 = 24$

   $V\left(X\right) = npq = 200 * 0.12 * 0.88 = 21.\,12.$ et $\sigma\left(X\right) = \sqrt{npq} = \sqrt{21.\,12} = 4.6$

2. $npq > 18$, on peut donc approximer la loi binomiale par une loi normale, la loi normale $N\left(24; 4.6\right)$ ses paramètres étant l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale. $P(X = 26) = \binom{200}{26} * 0.12^{26} * 0.88^{174} = 7.62 \times 10^{-2}$

3. Si l'on désigne par Y la variable aléatoire suivant la loi $N\left(24; 4.6\right)$,on doit effectuer une correction de continuité et on a : $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - P(Y \leq 20.5)$; pour calculer $P(Y \leq 20.5)$,on standardise en posant : $Z = \dfrac{Y - 24}{4.6}$ qui suit la loi normale centrée réduite $N\left(0; 1\right)$: $P(Y \leq 20) = P(Z \leq \dfrac{20.5 - 24}{4.6}) = P(Z \leq -0.76) = 1 - F\left(0.76\right)$, : et en remplaçant : $P(X > 20) = F\left(0.76\right) \simeq 0.7764$

   Enfin $P_{(X>20)}(X \leq 30) = \dfrac{P\left(20 < X \leq 30\right)}{P\left(X > 20\right)} = \dfrac{P\left(21 \leq X \leq 30\right)}{P\left(X > 20\right)} = \dfrac{P\left(20.5 \leq Y \leq 30.5\right)}{P\left(X > 20\right)}$; on calcule : $P\left(20.5 \leq Y \leq 30.5\right) = P(\dfrac{20.5 - 24}{4.6} \leq Z \leq \dfrac{30.5 - 24}{4.6}) = F\left(1.41\right) - F\left(-0.76\right) = F\left(1.41\right) - 1 + F\left(0.76\right) = 0.9007 + 0.7764 - 1 = 0.677\,1$ et en remplaçant : $P_{(X>20)}(X \leq 30) = \frac{P(20<X\leq 30)}{P(X>20)} = \frac{0.67711}{0.7764} = 0.872\,1$

6 EXERCICE 6

X suit une loi uniforme sur $[30; 90]$

1. $P\left(X < 60\right) = \boxed{0.5}$

2. La fonction de répartition est définie par : $\begin{cases} F\left(x\right) = 0 \text{ si } x \in]-\infty; 30[\\ F\left(x\right) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-30}{60} \text{ si } x \in [30; 90] \\ F\left(x\right) = 1 \text{ si } x \in]90; +\infty[\end{cases}$

3. $P\left(X > 40\right) = 1 - F\left(40\right) = \frac{40-30}{60} = \dfrac{1}{6} \simeq 0.1667$

4. $P\left(35 < X < 55\right) = F\left(55\right) - F\left(35\right) = \frac{55-30}{60} - \frac{35-30}{60} = \dfrac{1}{3}$