CORRIGE PARTIEL BLANC JANVIER 2012

L2MATH

AES

1 EXERCICE-1

1. $Card\,(\Omega) = \binom{20}{10} = 184\,756$
2. Il y a 13 professionnels ; soit A l'événement : " Le jury est composé exclusivement de professionnels ". $P\,(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{13}{10}}{\binom{20}{10}} = \dfrac{1}{646} \simeq 1.5 \times 10^{-3}$
3. Soit B l'événement :" le jury est composé pour moitié de femmes", alors $P\,(B) = \dfrac{CardB}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{11}{5} * \binom{9}{5}}{\binom{20}{10}} = \dfrac{1323}{4199} = 0.3151$.

2 EXERCICE-2

On commence par calculer les effectifs marginaux.

	Sancerre (S)	**A**lsace (A)	
Rouge (R)	160	130	290
Blanc (B)	470	240	710
	630	370	1000

$P(R) = \dfrac{290}{1000} = 0.29$; $P(S) = \dfrac{630}{1000} = 0.63$ et
$P\,(R \cap S) = \dfrac{160}{1000} = 0.16$. On applique alors la formule de Poincaré :
$P\,(R \cup S) = P(R) + P(S) - P\,(R \cap S) = 0.29 + 0.63 - 0.16 = 0.76$

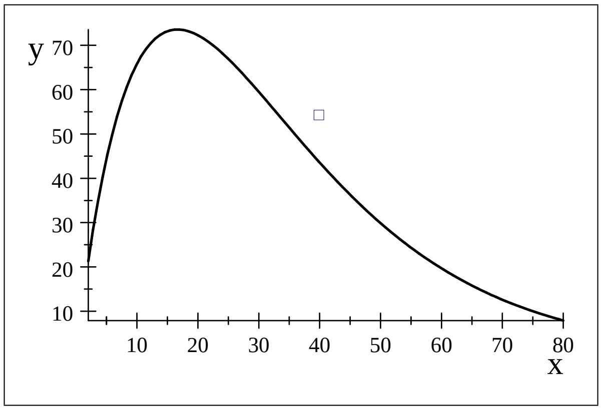
3 EXERCICE-3

$L\,(t) = 12te^{-0.06t}$

1. La fonction est définie d'après l'énoncé sur $[2; 80]$; elle est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :
$L'\,(t) = 12e^{-0.06t} + 12t\,(-0.06)\,e^{-0.06t}$ en utilisant la formule : $(uv) = u'v + uv'$.
$L'\,(t) = \boxed{10e^{-0.06t}\,(1 - 0.06t)}$; elle est donc du signe de $1 - 0.06t$, fonction affine qui s'annule en $t = \dfrac{1}{0.06} = 16.67$

t	2		50/3		80
$L\prime$		$+$	0	$-$	
L	$24e^{-0.12}$	$\nearrow$	$200e^{-1}$	$\searrow$	$960e^{-4.8}$

. valeurs approchées : $= \begin{array}{c} L\,(50/3) \simeq 73.58 \\ L\,(2) \simeq 21.29 \\ L\,(80) \simeq 7.9 \end{array}$

2. 

4 EXERCICE-4(8pts)

1. La matrice B
   a. On calcule : $\det(B) = \begin{vmatrix} 0.75 & -0.06 \\ -1 & 0.96 \end{vmatrix} = 0.66$, inverse: ce déterminant est non nul donc B est inversible.

   b. $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)}{}^{t}ComB = \dfrac{1}{0.66}\begin{bmatrix} 0.96 & 0.06 \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix}$

   c.

2. La matrice A des coefficients techniques de production est :
   $A = \begin{bmatrix} 12.5/50 & 15/250 \\ 1 & 10/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.06 \\ 1 & 0.04 \end{bmatrix}$; elle donne pour chaque secteur sa consommation intermédiaire sous forme de pourcentage de sa production totale ou les consommations intermédiaires pour chaque unité monétaire produite.

3. On prend l'équation fondamentale du modèle de léontieff : $X = AX + D \Leftrightarrow D = X - AX$,soit $D = (I - A)\,X$.Déterminons $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.25 & 0.06 \\ 1 & 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.06 \\ -1 & 0.96 \end{bmatrix} = B$. On doit déterminer la nouvelle demande finale :
   $D = \begin{bmatrix} 70 \\ 300 \end{bmatrix}$; $BX = D \Leftrightarrow X = B^{-1}D$, en multipliant les deux membres à gauche par B^{-1},ce qui donne :
   $X = \dfrac{1}{0.66}\begin{bmatrix} 0.96 & 0.06 \\ 1 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 \\ 300 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 129.09 \\ 446.97 \end{bmatrix}$

5 EXERCICE-5(5pts)

Un monopole vend deux produits dont la fonction de profit est donnée par :(x et y quantités demandées respectives des deux biens):

$$B(x,y) = -2x^2 - 3y^2 - 2xy + 30x + 50y - 10$$

1. $B(5,4) = 202$
2. $-2x^2 - 3y^2 - 2xy + 30x + 50y - 10 \left\{ \begin{array}{l} B'_x = -4x - 2y + 30 \\ B'_y = -2x - 6y + 50 \end{array} \right.$,
3. $B'_y(5,4) = -5 * 2 - 6 * 4 + 50 = 16$; on a donc l'approximation : $\Delta B \simeq B'_y(5,4) * \Delta y$ soit ici : $\Delta B \simeq B'_y(5,4) * 0.05 = 16 * 0.05 = 0.8$ car $k = \Delta y = 0.05$ On peut vérifier : $B(5,4.05) = 202.792\,5 =$ et $B(5,4) + \Delta B \simeq 202 + 0.8 = 202.8$

4. $\begin{cases} r = B''_{x^2} = -4 \\ t = B''_{y^2} = -6 \\ s = B''_{xy} = B''_{yx} = -2 \end{cases}$

5. On détermine les points critiques, c'est à dire annulant les dérivées partielles premières, en résolvant le système suivant : $\begin{cases} B'_x = -4x - 2y + 30 = 0 \\ B'_y = -2x - 6y + 50 = 0 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} 4x + 2y = 30 \\ 2x + 6y = 50 \end{cases}$, dont la solution est : $x = 4$ et $y = 7$. Il y a donc un unique point critique, le point $A(4, 7)$.

6. Il reste à étudier les conditions suffisantes du second ordre, en calculant le Hessien :

   $H = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 20.$

   Conclusion : $H > 0$ au point A,on a donc un extremum en A. Le signe commun de r et t est négatif, on a donc un maximum en A et le bénéfice maximum est : $B\left(4, 7\right) = 225$