Sujet 1

I EXERCICE-1

1. Le bureau
   a. On doit choisir des éléments distincts et les ordonner (leur affecter un rôle : président, etc..), il s'agit donc d'arrangements.Soit A l'événement : le bureau est formé de trois étudiants distincts ; $CardA = A_{50}^{3} = 50 * 49 * 48 = \boxed{117\,600.}$

   b. $P(A) = \dfrac{\binom{20}{2} * \binom{30}{1} * 3!}{A_{50}^{3}} = \dfrac{34\,200}{117\,600} \simeq 0.290\,8$ soit environ $\boxed{29.08\ \%}$

2. Notons respectivement V_1 et V_2 les événements " Le feu est vert au carrefour 1" et " Le feu est vert au carrefour 2". $P(V_1) = 0.75$ et $P(V_2) = 0.25$ et $P(V_1 \cup V_2) = 0.80$.
   a. D'après la formule de Poincaré, on a : $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2)$, soit : $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cup V_2) = 0.75 + 0.25 - 0.80 = 0.20$.

   b. On doit calculer $p = P(V_1 \cup V_2) - P(V_1 \cap V_2) = 0.80 - 0.20 = 0.6$

3. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

   $(3x+5)^4 = 81x^4 + 540x^3 + 1350x^2 + 1500x + 625$

II EXERCICE-2(4 points)

1. Soient $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.
   a. $C = AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 29 \end{bmatrix}$ et $D = BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$; il n'est pas étonnant de trouver des résultats différents car le prodit de matrices n'est pas commutatif.

   b. Calculer $E = AB + A$
      i. Directement : $E = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 29 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 14 \\ 21 & 31 \end{bmatrix}$

      ii. Avec factorisation :
      $$E = AB + A = A(B + I_2) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 14 \\ 21 & 31 \end{bmatrix}$$

2. $G = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -33 \\ 30 & -30 \end{bmatrix}$

III EXERCICE-3 (4 points)

1. $C_m(q) = C'(q) = 0.088\,2q^2 - 8.4q + 529.2$, donc $C_m(100) = 0.088\,2 * 100^2 - 8.4 * 100 + 529.2 \simeq 571.2$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la $101^{éme}$ unité ou de la dernière unité produite, la 100^{eme}.

2. Calculer le coût moyen : $C_M(q) = \frac{35280 + 529.2q - 4.2q^2 + 0.029\,4q^3}{q}$ et $C_M(100) = \frac{35280 + 529.2*100 - 4.2*100^2 + 0.029\,4*100^3}{100} = 756$.

3. $C(100) = 756 * 100 = 75\,600$ et $E_{C/q} = \frac{qC'}{C}$ soit $E_{C/q}(100) = \frac{100*571.2}{75\,600} \simeq 0.76$; si à partir d'une quantité de 100, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.76%.

   Remarque : on pouvait aussi directement utiliser la formule : $E_{C/q} = \dfrac{C_m(q)}{C_M(q)} = \dfrac{571.2}{756} \simeq \boxed{0.76}$

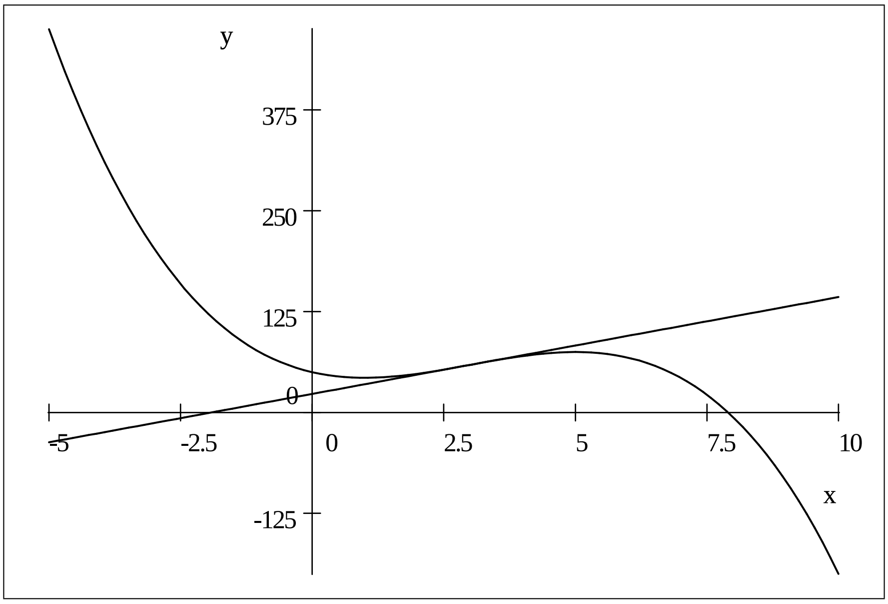
IV EXERCICE-4 (5 points)

. La dérivée est : $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x-1)(x-5)$, car les racines sont 1 et 5 (On calcule le discriminant, $\Delta = 18^2 - 4(-3)(-15) = 144$, etc.) ; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	-5		1		5		10
$y\prime$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	475				75		
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			43				-200

1. Convexité : $f^{"\prime}(x) = -6x + 18$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en 3, est positive $]-5;3[$ et négative $]3;10[$; la fonction est convexe sur $]-5;3[$ et concave sur $]3;10[$; il y a donc un point d'inflexion : le point I d'abscisse 3 où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

2. La tangente en I a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit ici : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$; on a :
$\begin{cases} f(3) = 59 \\ f'(3) = -3 * 9 + 18 * 3 - 15 = 12 \end{cases}$ soit $y = 12(x-3) + 59 = \boxed{12x + 23}$

3. 

V EXERCICE-6 (2 points)

$c(x;y) = 7x^2 + 2xy^2 + y^2 + 20.$

$$\begin{cases} c'_x(x\ ;\ y) = 14x + 2y^2 \\ c'_y(x\ ;\ y) = 4xy + 2y \end{cases}$$