I EXERCICE-1

1. Si A désigne l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet, $\Omega = A^6$ et donc $Card\,\Omega = 26^6 = \boxed{308\,915\,776}$
2. Il s'agit alors d'arrangements donc $Card\,\Omega = A_{26}^6 = \dfrac{26!}{20!} = \boxed{165\,765\,600}$
3. On a 26 possibilités pour le choix de la première lettre, puis pour chacune des autres 25, en s'interdisant le choix de la lettre précédente, donc en conclusion : $Card\,\Omega = 26 * 25^5 = \boxed{253\,906\,250}$
4. $Card\;\Omega = \binom{32}{5}$; et si A désigne l'événement :"obtenir exactement deux rois, $Card\;A = \binom{4}{2} * \binom{28}{3} = 19\,656$ et $P\;(A) = \dfrac{\binom{4}{2} * \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{351}{3596} = \boxed{9.\,76 \times 10^{-2}}$
5. Exercice -5
   a. $Card\,\Omega = \binom{40}{10} = 847\,660\,528$; un cas favorable est un ensemble de 5 paires donc il y a : $\binom{20}{5} = 15\,504$ cas favorables, donc la probabilité cherchée est : $\dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{10}} = \dfrac{3}{164\,021} \simeq \boxed{1.\,8 \times 10^{-5}}$
   b. Soit B l'événement :" n'avoir aucune paire de chaussures " ; celà signifie que l'on a choisi 10 paires parmi 20 et dans chacune de ces paires, une chaussure sur les deux, ce qui donne : $Card\,B = \binom{20}{10} * 2^{10} = 189\,190\,144$ ce qui donne : $P\,(B) = \dfrac{\binom{20}{10} * 2^{10}}{\binom{40}{10}} = \dfrac{256}{1147} \simeq \boxed{0.223\,2}$

		Options		calculatrices		enveloppes
					↗	E_1
				C_1	↗	E_2
			↗	C_2	↗	E_3
		O_1	↗	C_3	↗	E_4
			↗			
	↗					
$\star$						
	↘					
			↘			
		O_2	↘		↘	
			↘	C_1		E_1
				C_2	↘	E_2
				C_3	↘	E_3
					↘	E_4

6. $\Omega = \{O_1; O_2\} \times \{C_1; C_2; C_3\} \times \{E_1; E_2; E_3; E_4\}$ ce qui donne : $Card\,(\Omega) = 2 * 3 * 4 = 24.$
7. La formule du binôme de Newton est : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}}$; on peut utiliser le triangle de Pascal (4éme ligne) : $(3x+2)^4 = (3x)^4 + 4\,(3x)^3 * 2 + 6\,(3x)^2 * 2^2 + 4\,(3x) * 2^3 + 2^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

II EXERCICE-2

1. On utilise la formule de Poincaré : $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\,(B) - \mathbf{P}\,(A \cap B)$ soit $\mathbf{P}\,(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\,(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$ d'où $\mathbf{P}\,(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - 0.3 = \boxed{0.025}$
2. On doit calculer : $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = \boxed{0.7.}$
3. On cherche : $\mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}\,(A \cap B) = 0.3 - 0.025 = \boxed{0.275}$

III EXERCICE-3 $(3pts)$

1. $\begin{vmatrix} a & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & a \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à : $2a + 10 + 28 - 5a = 0$ soit $\boxed{a = \frac{38}{3}}$
2. $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 12 \\ 30 & -6 & 51 \end{bmatrix}$

IV EXERCICE-4

La fonction de coût d'un bien est donné en fonction de la quantité q par :
$C(q) = 84 + 1.26q - 0.01q^2 + 0.00007q^3 \ q \geq 0$

1. $C_m(q) = C'(q) = 1.26 - 0.02q + 0.00021q^2$, donc $C_m(100) = 1.26 - 2 + 0.00021 * 100^2 \simeq 1.36$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la 101 éme unité;
2. Calculer le coût moyen en $C_M(q) = \frac{84+1.26q-0.01q^2+0.00007q^3}{q}$ et $C_M(100) = \frac{84+126-0.01*100^2+0.00007*100^3}{100} = 1.8$
3. $C(100) = 84 + 126 - 0.01 * 100^2 + 0.00007 * 100^3 = 180$ et $E_{C/q} = \frac{qC'}{C}$ soit $E_{C/q}(100) = \frac{100*1.36}{180} \simeq 0.76$; si à partir d'une quantité de 100, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.76%.
4. Pour étudier la convexité de cette fonction on étudie la signe de la dérivée seconde : $C^{"}(q) = -0.02 + 0.00042q$; la dérivée seconde s'annule si $q = \frac{0.02}{0.00042} \simeq 47.62$ et la dérivée seconde étant une fonction affine on en déduit son signe et la concavité de C :

q	0	47.62	$+\infty$
$C^{"}$	$+$	0	$-$
C	Convexe	Inflexion	Concave

.

La courbe admet un point d'inflexion, le point I d'abscisse 47.62, et d'ordonnée $(C(47.62) = 84 + 1.26 * 47.62 - 0.01 * 47.62^2 + 0.00007 * 47.62^3 = 128.88$, car la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

V EXERCICE-5

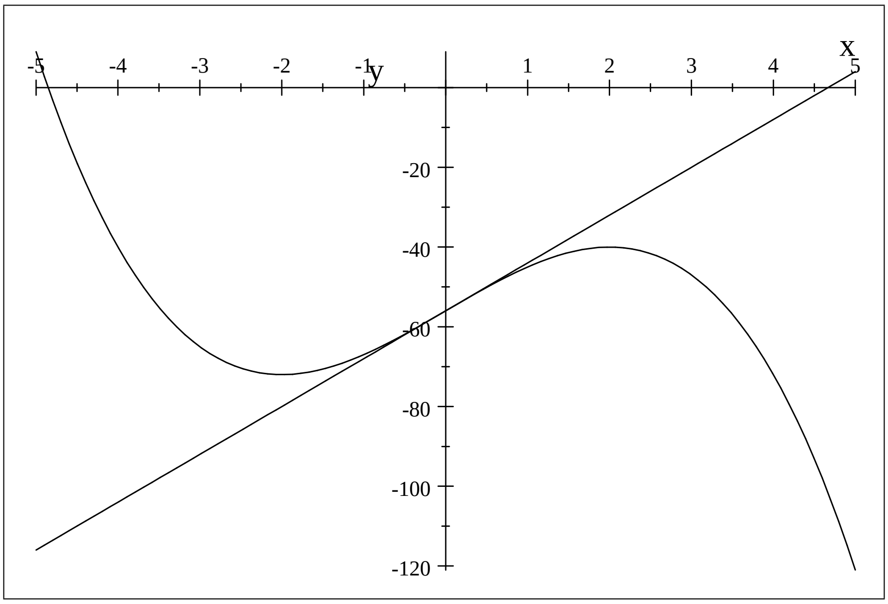
Soit $f(x) = -x^3 + 12x - 56$

1. L e domaine est $]-\infty; +\infty[$ et les limites à l'infini sont celle de $-x^3$, donc $+\infty$ à $-\infty$ et $-\infty$ à $+\infty$. La dérivée est : $f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x-2)(x+2)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$y\prime$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-88	$\nearrow$	-40	$\searrow$	$-\infty$

2. Convexité : $f^{"}\prime(x) = -6x$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en 0, est positive $]-\infty; 0[$ et négative dans ; la fonction est convexe sur $]-\infty; 0[$ et concave sur $]0; +\infty[$; il y a donc une erreur de texte car il n'y a qu'un point d'inflexion $I(0; -56)$.
3. La tangente en I a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit ici : $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = 12x - 56$

Corrigé partiel blanc

4. 

VI EXERCICE-6

$c(x;y) = x^2 + 2xy + y^2 + 20.$; on a : $\begin{cases} c'_x = 2x + 2y \\ c'_y = 2x + 2y \end{cases}$

VIIEXERCICE-7

$P(L;K) = 1.01L^{0.25}K^{0.75}$

1. $P(147;208) = 1.01 * 147^{0.25} * 208^{0.75} = 192.62$ et $P(147;210) = 1.01 * 147^{0.25} * 210^{0.75} = 194.01$. On a alors :
2. $\dfrac{\partial P}{\partial K}(L;K) = \left(1.01L^{0.25}\right) * 0.75K^{0.75-1} = \boxed{0.7575L^{0.25}K^{-0.25}}$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial K}(147;208) = 0.7575 * 147^{0.25} * 208^{-0.25} = 0.6945.$
   L'élasticité partielle de P par rapport à K est donnée par : $E_{P/K} = \dfrac{K * P'_K}{P} = \dfrac{208 * 0.6945}{192.62} \simeq \boxed{0.75}$. Interprétation : si L reste constant et égal à 147, et qu'à partir de $K = 208$, K varie de 1%, on doit s'attendre à une hausse de la production de 0.75%.