Sujet BIS

I EXERCICE-1

1. Le bureau
   a. On doit choisir des éléments distincts et les ordonner (leur affecter un rôle : président, etc..), il s'agit donc d'arrangements.Soit A l'événement : le bureau est formé de trois étudiants distincts ; $CardA = A_{50}^3 = 50 * 49 * 48 = \boxed{117\,600.}$

   b. $P(A) = \dfrac{\binom{30}{2} * \binom{20}{1} * 3!}{A_{50}^3} = \dfrac{52\,200}{117\,600} \simeq 0.4439$ soit environ $\boxed{44.39\ \%}$

2. Notons respectivement V_1 et V_2 les événements " Le feu est vert au carrefour 1" et " Le feu est vert au carrefour 2". $P(V_1) = 0.70$ et $P(V_2) = 0.30$ et $P(V_1 \cap V_2) = 0.10$.
   a. D'après la formule de Poincaré, on a : $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2)$, soit : $P(V_1 \cup V_2) = 0.70 + 0.30 - 0.10 = 0.90$.

   b. On doit calculer $p = P(V_1 \cup V_2) - P(V_1 \cap V_2) = 0.90 - 0.10 = 0.80$

3. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

   $(2x+3)^5 = 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$

II EXERCICE-2 (4 points)

1. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
   a. $C = AB = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 34 \end{bmatrix}$ et $D = BA = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$; il n'est pas étonnant de trouver des résultats différents car le prodit de matrices n'est pas commutatif.

   b. Calculer $F = AB + B$
      i. Directement : $F = \begin{bmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 29 \\ 22 & 37 \end{bmatrix}$

      ii. Avec factorisation :
      $E = AB + B = (A + I_2)B = \left(\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 29 \\ 22 & 37 \end{bmatrix}$

2. $H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 12 \\ 30 & -6 & 51 \\ -15 & -6 & -24 \end{bmatrix}$

III EXERCICE-3 (4 points)

1. $C_m(q) = C'(q) = 0.2205q^2 - 21q + 1323$, donc $C_m(20) = 0.220\,5 * 20^2 - 21 * 20 + 1323 = 991.2$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la $21^{éme}$ unité ou de la dernière unité produite, la 20^{eme}.

2. Calculer le coût moyen : $C_M(q) = \frac{88200 + 1323q - 10.5q^2 + 0.0735q^3}{q}$ et $C_M(20) = \frac{88200 + 1323*20 - 10.5*20^2 + 0.0735*20^3}{20} = 5552.4$

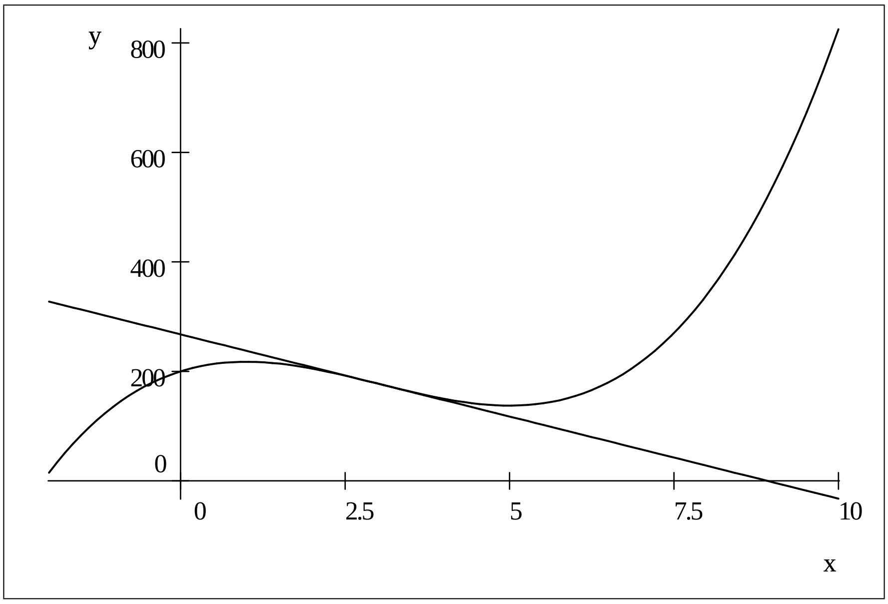
3. $C(20) = 5552.4 * 20 = 111048$ et $E_{C/q} = \frac{qC'}{C}$ soit $E_{C/q}(20) = \frac{20*991.2}{111048} \simeq 0.18$; si à partir d'une quantité de 20, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.18%.

   Remarque : on pouvait aussi directement utiliser la formule : $E_{C/q} = \dfrac{C_m(q)}{C_M(q)} = \dfrac{991.2}{5552.4} \simeq 0.18$

IV EXERCICE-4 (5 points)

. La dérivée est : $f'(x) = 7.5x^2 - 45x + 37.5$, : $7.5(x-1)(x-5)$, car les racines sont 1 et 5 (On calcule le discriminant, $\Delta = 45^2 - 4(7.5)(37.5) = 900$, etc.) ; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	-2		1		5		10
$y\prime$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			217.5				825
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	15				137.5		

1. Convexité : $f"'\left(x\right) = 15x - 45$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en 3, est négative sur $]-2;3[$ et positive $]3;10[$; la fonction est concave sur $]-2;3[$ et convexe sur $]3;10[$; il y a donc un point d'inflexion : le point I d'abscisse 3 et d'ordonnée où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
2. La tangente en I a pour équation : $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$ soit ici : $y = f'\left(3\right)\left(x-3\right) + f\left(3\right)$; on a :
$\left\{\begin{array}{l} f\left(3\right) = 177.5 \\ f'\left(3\right) = -30 \end{array}\right.$: soit $y = -30\left(x-3\right) + 177.5 = -30x + 267.5$
3. 

V EXERCICE-6 (2 points)

$g\left(x;y\right) = x^3 + 2x^2y + 5y + 20$

$\left\{\begin{array}{l} g'_x\left(x\ ;\ y\right) = 3x^2 + 4xy \\ g'_y\left(x\ ;\ y\right) = 2x^2 + 5 \end{array}\right.$