L2 # CORRIGE DU PARTIEL DE MATHEMATIQUES Mai 2008

I EXERCICE-1(3pts)

On peut appeler M l'événement "valider l'EC de MATH", H l'événement "valider l'EC de HPE2" et L "valider sa licence".

1. On a : $P(L) = P(M \cap H)$, ce qui donne d'après la formule de Poincaré : $P(M \cap H) = P(M) + P(H) - P(M \cup H) = 0.75$ $+0.65 - 0.80 = 0.60$.
2. $P\left(\overline{M} \cap \overline{H}\right) = P\left(\overline{M \cup H}\right) = 1 - P(M \cup H) = 1 - 0.80. = 0.2$.
3. On doit calculer :$P\left(\left(\overline{M} \cap H\right) \cup \left(M \cap \overline{H}\right)\right) = P(M \cup H) - P(M \cap H) = 0.80 - 0.60 = 0.2$

II EXERCICE-2

$P(K, L) = 450L - 100L^2 + 100KL + 360K - 300K^2$

1. On va poser les conditions nécessaires du premier ordre, qui permettront de déterminer les points critiques.
$\dfrac{\partial P}{\partial K}(K, L) = 100L + 360 - 600K$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial L}P(K; L) = 450 - 200L + 100K$, ce qui donne : $\begin{cases} -600K + 100L = -360 \\ 100K - 200L = -450 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -30K + 5L = -18 \\ 2K - 4L = -9 \end{cases}$, Solution is: $\left[K = \dfrac{117}{110}, L = \dfrac{153}{55}\right]$, ce qui donne un point critique : $A\left(\frac{117}{110}, \frac{153}{55}\right)$.
2. On forme les conditions suffisantes du second ordre en calculant le Hessien et en déterminant son signe :

$r = \dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K; L) = -600$, $t = \dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K; L) = -200$ et $s = \dfrac{\partial^2 P}{\partial K \partial L}(K; L) = 100$, ce qui donne : $H = \begin{vmatrix} -600 & 100 \\ 100 & -200 \end{vmatrix} =$ $110\,000 > 0$; on a donc un extremum, et le signe commun de r et t étant négatif, il s'agit d'un maximum. Ce maximum vaut : $P\left(\frac{117}{110}, \frac{153}{55}\right) = \frac{8991}{11} \simeq 817.36$

III EXERCICE-3

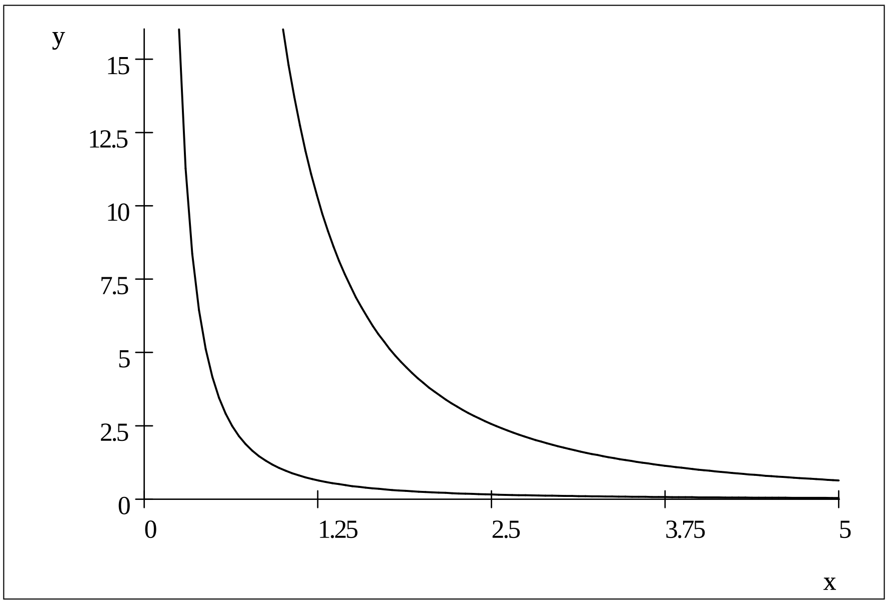
1. Courbes de niveau

a. $f(x, y) = 4$ équivaut à $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = 4$, soit $y^{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$ soit $y = \left(\dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^4 = \dfrac{16}{x^2} = 16x^{-2}$, car x et y sont positifs. On dérive :

$y' = -2\left(16x^{-3}\right) < 0$ et on obtient le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$y\prime$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

b. $f(x, y) = 2$ équivaut à : $y = \left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^4 = \dfrac{1}{x^2}$.



2. $E_{z/x} = \dfrac{x * z'_x}{z} = \frac{x*2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}$ de même : $E_{z/y} = \dfrac{y * z'_y}{z} = \dfrac{y * 2\left(\frac{1}{4}\right)x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}. = \frac{1}{4}$ Si on augmente le volume de travail de 1%, (le volume d'équipement restant constant) on doit s'attendre à une augmentation de 0.5% de la production. De même, si on augmente le volume d'équipement de 1%, (le volume de travail restant constant) on doit s'attendre à une augmentation de 0.25% de la production.

3. $f(x, y) = 2 * x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$et on doit calculer : $f(1.1x, 1.1y) = 2 * (1.1x)^{\frac{1}{2}}(1.1y)^{\frac{1}{4}} = (1.1)^{\frac{3}{4}} 2 * x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = (1.1)^{\frac{3}{4}} f(x, y)$. La production est mulitipliée par $(1.1)^{\frac{3}{4}} \simeq 1.074\,1$ ce qui représente une augmentation d'environ $7.4\,1\%$. On en conclut que les rendements sont décroissants à l'échelle.

IV EXERCICE-4**(4pts)**

Soit : $f(x; y) = (2x + 1)^3 + (y + 1)^4$

1. $f(x; y) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 2$
2. $f'_x(x; y) = 24x^2 + 24x + 6$ et $f'_y(x; y) = 4y^3 + 12y^2 + 12y + 4$.
3. Calculer $f(1; 3) = 3^3 + 4^4 = 283$. On sait que : $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) \simeq hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)$; on a ici : $h = -0.1$ et $k = -0.03$; on a $f'_x(1; 3) = 24 + 24 + 6 = 54$ et $f'_y(1; 3) = 4(3)^3 + 12(3)^2 + 12 * 3 + 4 = 256$, ce qui donne : $f(0.9; 2.97) \simeq f(1; 3) - 0.1 * 54 - 0.03 * 256 = 283 - 0.1 * 54 - 0.03 * 256 = 269.\,92$
4. $f(0.9\,; 2.97) = (2 * 0.9 + 1)^3 + (2.97 + 1)^4 = 2.8^3 + 3.97^4 = 270.\,36$. L'erreur dûe à l'approximation est de : $270.\,36 - 269.\,92 = 0.44$.

V EXERCICE-5**(2 pts)**

$Card(\Omega) = \binom{10}{2} * \binom{8}{3} * \binom{5}{5} = 2520$

VI EXERCICE-6**(3pts)**

1. $Card(\Omega) = A_{150}^{25} = \dfrac{150!}{125!} \simeq 3.\,034\,7 \times 10^{53}$
2. On choisit une fille que l'on place en tête de liste : 60 possibilités

   Il reste 149 candidats et 24 places : A_{149}^{24}, donc la solution est : $60 * A_{149}^{24} = 60 * \dfrac{149!}{125!} \simeq 1.\,213\,88 \times 10^{53}$