Sujet 2

# I EXERCICE-1

1. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ; $(3x+2)^5 = 240x + 720x^2 + 1080x^3 + 810x^4 + 243x^5 + 32$

2. $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

# II EXERCICE-2

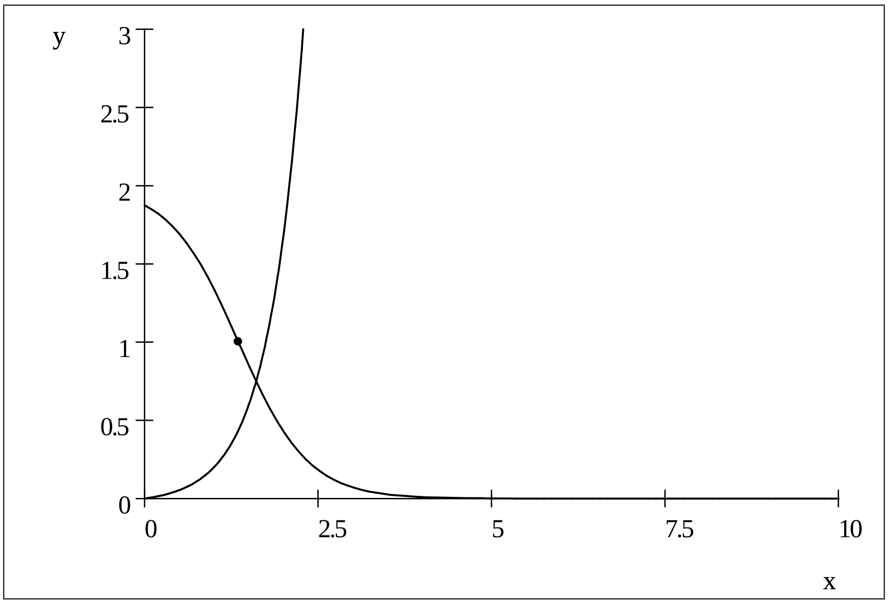
1. A l'équilibre, on a : $\dfrac{30}{e^{2q}+15} = \dfrac{e^{2q}-1}{32} \Leftrightarrow \left(e^{2q}+15\right)\left(e^{2q}-1\right) = 32*30 \Leftrightarrow 14e^{2q} + e^{4q} - 15 = 960$ soit $e^{4q} + 14e^{2q} - 975 = 0$,soit avec $X = e^{2q}$, $X^2 + 14X - 975 = 0$,ce qui donne $\Delta = 196 + 4*975 = 4096 = 64^2$ ; on a donc deux racines distinctes $X' = 25$ , $X"$étant négative ; on obtient finalement : $e^{2q} = 25$ soit $q_0 = \ln 5 \simeq 1.61$ et en remplaçant : $p_0 = f(q) = \dfrac{30}{25+15} = \dfrac{3}{4} = 0.75$

2. $f'(q) = -\dfrac{30*2e^{2q}}{\left(e^{2q}+15\right)^2} < 0$ et $g'(q) = \frac{1}{32}\left(2e^{2q}\right) > 0$;

| $q$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | |
| $f$ | $\frac{15}{8}$ | $\searrow$ | $0$ |

| $q$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Convexité : on étudie pour chacune de ces fonctions le signe de la dérivée seconde :
$f"(q) = \left(-\dfrac{120*2e^{2q}}{\left(e^{2q}+15\right)^2}\right)' = -60\dfrac{2e^{2q}\left(e^{2q}+15\right)^2 - e^{2q}*2*2e^{2q}\left(e^{2q}+15\right)}{\left(e^{2q}+15\right)^2}$
soit $f"(q) = \dfrac{1}{e^{2q}+15}\left(120e^{4q} - 1800e^{2q}\right) = 120\dfrac{\left(e^{4q}-15e^{2q}\right)}{e^{2q}+15} = 120\dfrac{e^{2q}\left(e^{2q}-15\right)}{e^{2q}+15}$ . cette dérivée est du signe de $e^{2q}-15$ ; elle s'annule pour $2q = \ln 15$ soit $q = \dfrac{1}{2}\ln 15 \simeq 1.35$; elle est positive sur $\left[\dfrac{1}{2}\ln 15; +\infty\right[$ et la fonction est convexe sur cet intervalle, elle est concave sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\ln 15\right[$ ; le point $I\left(\dfrac{1}{2}\ln 15; 1\right)$ est point d'inflexion ; on a calculé son ordonnée : $f\left(\dfrac{1}{2}\ln 15\right) = \dfrac{30}{e^{2*\frac{1}{2}\ln 15}+15} = \dfrac{30}{e^{\ln 15}+15} = \dfrac{30}{15+15} = 1$ .
$g"(q) = \frac{1}{8}\left(e^{2q}\right) > 0$ donc $g$ est convexe.



# CORRIGE DU PARTIEL

4. $\dfrac{30}{e^{2q}+15} = 1.5 \Leftrightarrow e^{2q} + 15 = \dfrac{30}{1.5}$ soit $e^{2q} = \dfrac{30}{1.5} - 15 = 5$ soit $q = \dfrac{1}{2}\ln 5$

5. $\left\{ p = \dfrac{30}{e^{2q}+15} \right. \Leftrightarrow e^{2q} + 15 = \frac{30}{p}$ soit $e^{2q} = \frac{30}{p} - 15$ et $\left\{ \begin{array}{c} q = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{30}{p} - 15\right)\right) \\ p \in \left]0; \dfrac{15}{8}\right] \end{array} \right.$

## III EXERCICE-3(7pts)

1.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_1 & & D_2 \\
 & & & \nearrow & C_1 \\
 & & & \longrightarrow & C_2 \\
 & & C_1 & \searrow & C_3 \\
 & \nearrow & & & \\
 & & & \nearrow & C_1 \\
\bigstar & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_2 \\
 & & & \searrow & C_3 \\
 & \searrow & & \nearrow & C_1 \\
 & & C_3 & \longrightarrow & C_2 \\
 & & & \searrow & C_3
\end{array}$$

$\Omega = C^2$, si l'on désigne par $C$ l'ensemble des deux coffres ; chaque résultat est un triplet dont chaque coordonnée est un des deux coffres ; $Card\Omega = 3^2 = 9$ .

2. $A_{10}^5 = 10 * 9 * 8 * 7 * 6 = 30\,240$

3. Les sites
   a. $\binom{10}{3} = 120$
   b. $A_{10}^3 = 3!\binom{10}{3} = 720$

4. Soit $A$ l'événement "Il doit retourner au sous-sol"

   On peut considérer l'événement contraire : $\overline{A}$: "les deux lampes sont bonnes"

   $P(\overline{A}) = \dfrac{\binom{22}{2}}{\binom{24}{2}} = \frac{11*21}{12*23} = \frac{77}{92} = 0.8370$ ; donc $P(A) = 1 - \frac{77}{92} = \boxed{\frac{15}{92} \simeq 0.1630}$