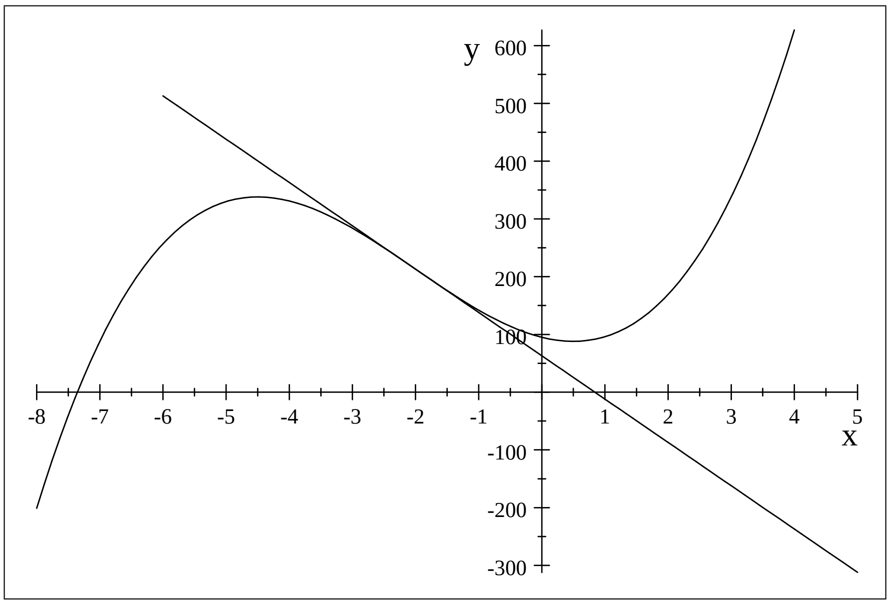
L2 **CORRIGE EXAMEN DE MATHEMATIQUES SUJET A** JANVIER 2011

I EXERCICE-1(5pts)

1. Le domaine est $]-\infty;+\infty[$ et les limites à l'infini sont celle de $4x^3$, donc $-\infty$ à $-\infty$ et $+\infty$ à $+\infty$. La dérivée est : $f'(x) = 12x^2 + 48x - 27 = 3(2x+9)(2x-1)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-4.5		0.5		$+\infty$
$y\prime$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	338	$\searrow$	88	$\nearrow$	$+\infty$

2. Convexité : $f^{"\prime}(x) = 24x + 48$ ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en -2, est négative sur $]-\infty;-2[$ et positive dans $]-2;+\infty[$; la fonction est concave sur $]-\infty;-2[$ et convexe sur $]-2;+\infty[$; il y a un point d'inflexion $I(-2;213)$.
3. La tangente en I a pour équation : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ soit ici : $y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$ soit $y = -75(x+2)+213 = -75x+63$,
4. $f(-8) = -201$ et $f(4) = 627$



II EXERCICE-2(4pts)

1. $\binom{15}{3} = 455$
2. $A_{60}^{25} = \binom{60}{25} * 25! = 8.052\,7 \times 10^{41}$
3. Notons respectivement V_1 et V_2 les événements " Le feu est vert au carrefour 1" et " Le feu est vert au carrefour 2". $P(V_1) = 0.75$ et $P(V_2) = 0.25$ et $P(V_1 \cup V_2) = 0.80$.
   a. D'après la formule de Poincaré, on a : $P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2)$, soit : $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cup V_2) = 0.75 + 0.25 - 0.80 = 0.20.$
   b. On doit calculer $P(V_1 \cup V_2) - P(V_1 \cap V_2) = 0.80 - 0.60 = 0.20$

III EXERCICE-3

1. La matrice B
   a. On calcule : $\det(B) = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.7 * 0.8 - (-0.2 * -0.05) = 0.55$; ce déterminant est non nul donc B est inversible.
   b. $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)} {}^{t}ComB = \dfrac{1}{0.55} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$
2. La matrice A des coefficients techniques de production est :

$A = \begin{bmatrix} 15/50 & 12.5/250 \\ 10/50 & 50/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$; elle donne pour chaque secteur sa consommation intermédiaire sous forme de pourcentage de sa production totale ou les consommations intermédiaires pour chaque unité monétaire produite.

3. On prend l'équation fondamentale du modèle de léontieff : $X = AX + D \Leftrightarrow D = X - AX$,soit $D = (I - A)\,X$.Déterminons $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = B$. On doit déterminer la nouvelle demande finale : $D = \begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix}$; $BX = D \Leftrightarrow X = B^{-1}D$, en multipliant les deux membres à gauche par B^{-1},ce qui donne : $X = \frac{1}{0.55}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.27 \\ 301.82 \end{bmatrix}$

IV EXERCICE-4

1. $B\,(2;3) = -3*4 - 2*9 - 2*6 + 50*2 + 30*3 - 20 = 128$
2. $-3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20 \begin{cases} B'_x = -6x - 2y + 50 \\ B'_y = -2x - 4y + 30 \end{cases}$
3. $\begin{cases} r = B''_{x^2} = -6 \\ t = B''_{y^2} = -4 \\ s = B''_{xy} = B''_{yx} = -2 \end{cases}$
4. Elasticité
   a. $E_{B/y} = \dfrac{yB'_y\,(x;y)}{B\,(x\,;y)} = \frac{y(-2x-4y+30)}{-3x^2-2y^2-2xy+50x+30y-20}$,soit en $(2;3)$, $E_{B/y}\,(2;3) = \dfrac{3\,(-2*2-4*3+30)}{128} \simeq 0.33$.
   b. Si y augmente de 1%,on peut estimer la variation de B à environ 0.33%.