CORRIGE EXERCICES TD Chapitre 1

1. Exercice 7
On note A l'événement : "obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois de suite un seul dé" et B : "obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite deux dés". Calculons leurs probabilités : $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^4}{6^4}$ donc $P\left(A\right) = 1 - \dfrac{5^4}{6^4} = \dfrac{671}{1296} \simeq 0.5177$ et $P\left(\overline{B}\right) = \dfrac{35^{24}}{36^{24}}$ donc $P\left(A\right) = 1 - \dfrac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0.491\,4$, donc A est plus probable que B.

2. Exercice 11
$\dfrac{\binom{12}{4} * \binom{8}{4}\binom{4}{4}}{3!} = 5775$. on divise par 3!, car il n'y a pas d'ordre dans les groupes et donc chaque cas est compté 6 fois (si on échange les trois groupes, c'est la même répartition).

3. Exercice 12
$\binom{12}{6} * \binom{6}{4}\binom{2}{2} = 13\,860$.

4. Exercice 14
$Card\left(\Omega\right) = \binom{7}{2}^2 = 441$
   a. Soit A l'événement :" il y a tous les jours au moins une boulangerie ouverte" , celà signifie que les deux boulangers ont choisi des jours de fermeture distincts : le premier a $\binom{7}{2}$ choix et le deuxième $\binom{5}{2}$, donc : $P\left(A\right) = \dfrac{\binom{7}{2} * \binom{5}{2}}{\binom{7}{2}^2} = \dfrac{10}{21} \simeq \boxed{0.476\,2}$

   b. Soit B l'événement :"Il y a un seul jour dans la semaine où les deux boulangeries sont fermées" ; $P\left(B\right) = \dfrac{\binom{7}{1} * \binom{6}{1} * \binom{5}{1}}{\binom{7}{2}^2} = \dfrac{10}{21}$, car il y a 7 possibilités pour le jour de fermeture commun, puis 6 pour la boulangerie "A" de choisir son 2eme jour de fermeture et 5 pour la boulangerie "B".

5. Exercice 18
Les combinaisons 6-2-1, 5-3-1 , 5-2-2 , 4-3-2 , 3-3-3 , 4-4-1 ne sont pas équiprobables ; calculons la probabilité d'avoir une somme S égale à 9 : il y a 3! possibilités d'obtenir 6-2-1 (toutes les permutations possibles) alors que par exemple il n'y a que 3 possibilités pour 5-2-2 ($(2,2,5)$ $(2,5,2)$ et $(5,2,2)$, les trois possibilités de placer le 5) et une seule pour 3-3-3 ; si on fait le bilan :
$P\left(S = 9\right) = \dfrac{6+6+3+6+1+3}{6^3} = \dfrac{25}{216}$
de même on trouve : $P\left(S = 10\right) = \dfrac{6+3+6+6+3+3}{6^3} = \dfrac{27}{216}$; le 10 est plus probable.

6. Ex 19
Chaque réponse est une application de l'ensemble Q des 20 questions dans l'ensemble des trois réponses possibles $R = \{V; F; \emptyset\}$; d'après le cours, il y a p^n applications de E_n dans F_p, soit ici $Card\left(\Omega\right) = 3^{20} \simeq 3.\,486\,8 \times 10^9$. On peut aussi noter que chaque réponse est un 20-uplet du type $(r_1; r_{2;}r_{3;\ldots}; r_{20})$ où $r_i \in R$; on en conclut que $\Omega = R^{20}$, donc que $Card\left(\Omega\right) = \left(Card\left(\Omega\right)\right)^{20} = 3^{20}$.
le nombre de cas favorables est le nombre de réponses comportant 10 réponses justes ; il y a $\binom{20}{10}$façons de choisir la position des 10 réponses justes et 2^{10} possibilités de ne pas répondre juste aux 10 autres questions, donc finalement : $\binom{20}{10} * 2^{10}$ cas favorables et donc une probabilité de : $\dfrac{\binom{20}{10} * 2^{10}}{3^{20}} = \dfrac{20!}{10! * 10!} * \dfrac{2^{10}}{3^{20}} = \frac{189\,190\,144}{3486\,784\,401} \simeq 0.05\,43$ donc environ 5.43%.
Remarque : les amateurs auront reconnu la loi binomiale : on répète 10 fois de suite, de façons indépendantes, l'expérience aléatoire consistant à répondre à une question avec deux résultats possibles : la réponse est juste (succès : $p = \dfrac{1}{3}$) ou la réponse n'est pas juste (échec : $q = \dfrac{2}{3}$) ; si X désigne le nombre de succès à l'issue de n parties, on a : $P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$ soit ici $\binom{20}{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10} * \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = \dfrac{\binom{20}{10} * 2^{10}}{3^{20}}$;

7. Ex 20
Il faut identifier les "plus courts chemins" : ce sont des 11-uplets comportant 3 N et $8E$, si l'on désigne respectivement par N et E un déplacement d'un bloc vers le nord et vers l'est .En conséquences, il reste à déterminer le nombre de possibilités de choix pour les " E", ce qui donne : $\binom{11}{8}$; si l'on déterminer le nombre de possibilités de choix pour les "N", on trouve $\binom{11}{3}$, mais on sait que $\binom{11}{8} = \binom{11}{3} = \dfrac{11 * 10 * 9}{3!} = 165$..

8. Ex22
Il y a $\binom{49}{6}$ possibilités et une seule combinaison gagnante, ce qui donne une probabilité de $\dfrac{1}{\binom{49}{6}}$ de trouver les 6 bons numéros, soit

de : $\dfrac{6*5*4*3*2}{49*48*47*46*45*44}$ ou de
$\dfrac{1}{49*47*46*3*44} = \frac{1}{13\,983\,816} \simeq 7.151\ \times 10^{-8}$.

9. Exercice 24 : pour le fun!!
   $4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40585$
10. Ex 22
    $Card\,(\Omega) = 4^4$ (applications de l'ensemble des personnes dans l'ensemble des étages) ; le nombre de cas favorables est $4!$ et la probabilité est : $\dfrac{4!}{4^4} = \dfrac{4*3*2}{4*4*4*4} = \dfrac{3}{32}$.