L2 Math. **CORRECTION EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES** anvier 2010

I EXERCICE-1

1. Les CV
   a. Card$(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$
   b. Les 10 CV, concernent 4 femmes et 6 hommes.
      i. On considère l'événement contraire : $\overline{A}$: " les trois CV retenus sont ceux de trois femmes". $P\left(\overline{A}\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$; on en déduit $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \frac{29}{30}$.
      ii. $P\left(\overline{B}\right) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{5}{6}$
      iii. Il est clair que cet événement est nécessairement réalisé : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} = \not{c}$ et $P(A \cup B) = 1$
      On peut aussi utiliser la formule de Poincaré : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; on doit calculer $P(A \cap B)$: probabilité qu'il y ait au moins un homme et au moins une femme ; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, ce qui donne : $P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$ car ces événements sont disjoints ; on obtient alors : $P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{29}{30} + \frac{5}{6} - \frac{4}{5} = 1$

2. $(a+b)^6 = a^6 + b^6 + 6ab^5 + 6a^5b + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2$. Le terme en x^4 dans le développement de $(2x+3)^6$ est donc : $15a^4b^2$, avec $a = 2x$ et $b = 3$ soit $15(2x)^4 * 3^2 = 2160x^4$. La réponse est : 2160;

II EXERCICE-2

On a $\Pi'_x(x;y) = -4x - 2y + 30$ et $\Pi'_y(x;y) = -6y - 2x + 50$ et $r = \Pi''_{x^2}(x;y) = -4$;
$s = \Pi''_{xy}(x;y) = \Pi''_{yx}(x;y) = -2$ et $t = \Pi''_{y^2}(x;y) = -6$

III EXERCICE-3

On sait que l'élasticité est donnée par la formule : $E_{z/x} = \frac{xz'_x}{z}$, si z est fonction de plusieurs variables. On a donc : $E_{D_x/p_x} = \frac{p_x D'_{p_x}}{D_x}$; calculons la dérivée : $\frac{\partial D_x}{\partial p_x} = -\frac{35}{3} p_x^{\frac{2}{3}}$, ce qui donne :

$$E_{D_x/p_x} = \frac{p_x D'_{p_x}}{D_x} = \frac{p_x * -\frac{35}{3} p_x^{\frac{2}{3}}}{D_x} = \frac{-35}{3} * \frac{p_x^{\frac{5}{3}}}{D_x} = \frac{-35}{3} * \frac{8^{\frac{5}{3}}}{8000 - 7 * 8^{\frac{5}{3}} + 8 * 16^{\frac{7}{2}}} \simeq \boxed{-0.0027}$$

; Le prix du bien X étant de 8 et celui du bien Y de 16, si on augmente p_x de 1%, p_y restant constant, on doit s'attendre à une baisse de la demande du bien X d'environ $-0.0027\,\%$.

IV EXERCICE-4 (7pts)

1. $A = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.4 \\ -0.32 & 0.62 \end{bmatrix}$; A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 0.65 & -0.4 \\ -0.32 & 0.62 \end{vmatrix} = 0.275$ donc A est inversible. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$. Il reste à déterminer la comatrice en explicitant les quatre cofacteurs :
   a.

a_{ij}	$a_{11} = 0.65$	$a_{12} = -0.4$	$a_{21} = -0.32$	$a_{22} = 0.62$
C_{ij}	$C_{11} = 0.62$	$C_{12} = -(-0.32)$	$C_{21} = -(-0.4)$	$C_{22} = 0.65$

   Ce qui donne $Com(A) = \begin{bmatrix} 0.62 & 0.32 \\ 0.4 & 0.65 \end{bmatrix}$, donc ${}^t Com(A) = \begin{bmatrix} 0.62 & 0.4 \\ 0.32 & 0.65 \end{bmatrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{0.275} \begin{bmatrix} 0.62 & 0.4 \\ 0.32 & 0.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.25 & 1.45 \\ 1.16 & 2.36 \end{bmatrix}$.

2. On obtient la demande finale en soustrayant la consommation intermédiaire à la production : $\begin{cases} d_1 = 180 - 63 - 88 = 29 \\ d_2 = 220 - 57.6 - 83.6 = 78.8 \end{cases}$

3. La matrice des coefficients techniques de production est : $\begin{bmatrix} 63/180 & 88/220 \\ 57.6/180 & 83.6/220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.4 \\ 0.32 & 0.38 \end{bmatrix}$

CORRECTION EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES

4. L'équation fondamentale de Léontieff donne : $AX + D = X$ soit $X - AX = D$ et en factorisant X à droite : $(I - A)X = D$; posons $B = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.35 & 0.4 \\ 0.32 & 0.38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.4 \\ -0.32 & 0.62 \end{bmatrix}$; on trouve que B est la matrice de la question 1 ; on doit résoudre : $BX = D'$, avec $D' = \begin{bmatrix} 35 \\ 95 \end{bmatrix}$; la matrice B^{-1} a été calculé à la question 1 ; on multiplie à gauche les deux membres par B^{-1} on obtient : $B^{-1}BX = B^{-1}D'$ soit $X = B^{-1}D' = \begin{bmatrix} 2.25 & 1.45 \\ 1.16 & 2.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216.5 \\ 264.8 \end{bmatrix}$

V EXERCICE-5

1. $p = 8.25e^{-0.02q} \Leftrightarrow e^{-0.02q} = \dfrac{p}{8.25} \Leftrightarrow -0.02q = \ln\left(\dfrac{p}{8.25}\right) \Leftrightarrow \boxed{q = -\dfrac{1}{0.02}\ln\left(\dfrac{p}{8.25}\right)}$; pour $p = 6$,on obtient : $q = -\dfrac{1}{0.02}\ln\left(\dfrac{6}{8.25}\right) \simeq 15.9$;
2. $R(q) = p * q = 8.25qe^{-0.02q}$; pour déterminer la quantité et le prix qui maximiseront R,on dérive cette fonction : $R'(q) = 8.25\left[e^{-0.02q} + q\left(-0.02e^{-0.02q}\right)\right] = 8.25e^{-0.02q}\left[1 - 0.02q\right]$,dérivée qui est du signe de la fonction affine $1 - 0.02q$, qui s'annule en $q = \dfrac{1}{0.02} = 50$,qui est positive sur $[0; 50]$ et négative sur $[50; +\infty[$; la fonction admet donc un maximum en 50, qui vaut $R(50) = 8.25qe^{-0.02*50} = 8.25 * 50e^{-1} = 412.5e^{-1} \simeq 151.75$
3. Le tableau de variations est donné par : .

q	0		50		$+\infty$
$R\prime$		$+$	0	$-$	
R		$\nearrow$	$412.5e^{-1}$	$\searrow$	
	0				0