Corrigé de l'examen blanc

I EXERCICE-1

1. Le message
   a. $\binom{10}{3} = 120$
   b. $\binom{9}{3} = 84$
2. Cursus
   a. $Card\Omega) = \binom{3}{1} * \binom{2}{1} = 6$
   b. Arbre
3.

	H	F	
C	35	15	50
E	230	220	450
	265	235	500

La formule de Poincaré donne :

$$P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F) = \frac{50}{500} + \frac{235}{500} - \frac{15}{500} = \boxed{\frac{27}{50}}$$

4. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

   $(3x+1)^5 = 243x^5 + 405x^4 + 270x^3 + 90x^2 + 15x + 1$

II EXERCICE-2

1. On sait que la production totale est la somme de la consommation intermédiaire et de la demande finale ;

   On a donc : $\begin{cases} d_1 = 140 - (80+20) = 40 \\ d_2 = 120 - (30+60) = 30 \end{cases}$

2. $A = \begin{bmatrix} \frac{80}{140} & \frac{20}{120} \\ \frac{30}{140} & \frac{60}{120} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. On a l'équation : $\boxed{\underbrace{X}_{\text{PRODUCTION TOTALE}} = \underbrace{AX}_{consommation\ intermediaire} + \underbrace{D}_{\text{DEMANDE FINALE}}}$,

   ce qui donne : $X - AX = D \Leftrightarrow (I-A)X = D$; on sait que pour résoudre cette équation on doit regarder si la matrice $C = (I-A)$ est inversible.On détermine alors cette matrice : $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = B$

   On calcule : $\det(B) = \begin{vmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{28}$; ce déterminant est non nul , B est donc inversible ; deux méthodes pour inverser B :

   a. Méthode 1 : on pose : $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, et on résoud : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, soit le système

$$\begin{cases} \frac{3}{7}a - \frac{3}{14}c = 1 \\ -\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{3}{7}b - \frac{3}{14}d = 0 \\ -\frac{1}{6}b + \frac{1}{2}d = 1 \end{cases} \text{ : ce qui donne : } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{14}{15} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

b. Méthode 2 : on utilise la formule : $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^{t}ComB$; il reste à déterminer la comatrice en explicitant les quatre cofacteurs :

b_{ij}	$b_{11} = \frac{3}{7}$	$b_{12} = -\frac{1}{6}$	$b_{21} = -\frac{3}{14}$	$b_{22} = \frac{1}{2}$
C_{ij}	$C_{11} = \frac{1}{2}$	$C_{12} = -\left(-\frac{3}{14}\right)$	$C_{21} = -\left(-\frac{1}{6}\right)$	$C_{22} = \frac{3}{7}$

Ce qui donne $Com(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$, donc ${}^{t}Com(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ donc $B^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{28}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{14}{15} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$.

c. On peut alors résoudre : $BX = D'$; en multipliant à gauche les deux membres par B^{-1} on obtient : $B^{-1}BX = B^{-1}D'$ soit $X = B^{-1}D'$. $X = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{14}{15} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{476}{3} \\ 138 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.67 \\ 138 \end{bmatrix}$

III EXERCICE-3

On va déterminer les points critiques en écrivant les conditions necessaires du 1er ordre : $f'_x(x;y) = f'_y(x;y) = 0$.

- On a $f'_x(x;y) = 6x + y - 1$ et $f'_y(x;y) = 6y + x + 1$; on doit résoudre le système : $\begin{cases} 6x + y - 1 = 0 \\ 6y + x + 1 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6x + y = 1 \\ x + 6y = -1 \end{cases}$, dont la résolution donne $x = \frac{1}{5}$ et $y = -\frac{1}{5}$, soit un seul point critique $A\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$
- Il reste à vérifier les conditions du second ordre : calculons les dérivées partielles secondes : $r = f^{"}_{x^2}(x;y) = 6$; $s = f^{"}_{xy}(x;y) = 1$ et $t = f^{"}_{y^2}(x;y) = 6$; ceci donne pour le Hessien : $H = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 35$ donc $H > 0$,la fonction admet un extremum au point critique ; le signe commun de r et s est positif, il s'agit donc d'un **minimum au point** $\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ et ce minimum vaut : $f\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right) = 3 * \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3 * \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} * \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{5}$.

IV EXERCICE-4

$\frac{\partial P}{\partial L}(L;K) = \left(1.05K^{\frac{2}{3}}\right) * \frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}} = 0.35K^{\frac{2}{3}} * L^{-\frac{2}{3}}$. L'élasticité partielle de P par rapport à L est donnée par : $E_{P/L} = \frac{L * P'_L}{P} = \frac{L * 0.35K^{\frac{2}{3}} * L^{-\frac{2}{3}}}{1.05L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \simeq 0.33$; on a une élasticité constante. Interprétation : si le capital étant constant, on augmente la quantité de travail de 1%, on doit s'attendre à une augmentation de la production d'environ 0.33%.