L2Math. **CORRIGE CONTRÔLE CONTINU** Mars 2010

I EXERCICE-1(4pts)

1. Notons A l'événement :" les trois personnes réservent dans trois hôtels différents" ; $\Omega = 5^3 = 125$; par ailleurs, les cas favorables sont les triplets de trois hôtels différents, et $Card\ A = A_5^3$, ce qui donne : $P\left(A\right) = \dfrac{A_5^3}{125} = \dfrac{5*4*3}{125} = 0.48$ soit 48%.

2. $Card\ \Omega = \binom{32}{5} = 201376$

   a. Soit B l'événement : "obtenir exactement trois rois", $Card\ B = \binom{4}{3} * \binom{28}{2} = 1512$ et $P\left(B\right) = \dfrac{\binom{4}{3} * \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{1512}{201376} = 7.5 \times 10^{-3} = \boxed{0.75 \times 10^{-2}}$

   b. Soit C l'événement : "obtenir au moins un roi", alors $\overline{C}$ représente l'événement "obtenir aucun roi" ; $P\left(\overline{C}\right) = \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}$ et $P\left(C\right) = 1 - \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} \simeq 0.512\,0$.

3. $Card\ \Omega = 10!$; appelons D l'événement : "les délégués français et allemands soient côte à côte". Il y a 9 façons de selectionner deux places contigües (il suffit de choisir la place la plus à gauche) et deux façons de placer les deux délégués, puis $8!$ façons de permuter les autres dans les 8 places restantes : $P\left(D\right) = \dfrac{9*2*8!}{10!} = \dfrac{1}{5}$

4. $\left(4x+3\right)^5 = 1024x^5 + 3840x^4 + 5760x^3 + 4320x^2 + 1620x + 243$

II EXERCICE-2(3pts)

On note respectivement F et V les événements "être une femme" et "aimer faire des courses de vêtements".

1. $P\left(F \cap V\right) = \dfrac{126}{500} = 0.252$

2. La formule de Poincaré donne : $P\left(F \cup V\right) = P\left(F\right) + P\left(V\right) - P\left(F \cap V\right) = \dfrac{230}{500} + \dfrac{360}{500} - \dfrac{126}{500} = 0.928$

III EXERCICE-3

1. $C_m\left(q\right) = C'\left(q\right) = 25\left(1.26 - 0.02q + 0.00021q^2\right) = 0.005\,25q^2 - 0.5q + 31.5$, donc $C_m\left(50\right) = 0.005\,25*50^2 - 0.5*50 + 31 = 19.125$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la 51 éme unité.

2. Calculer le coût moyen en $C_M\left(q\right) = \frac{0.00175q^3 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600}{q}$ et $C_M\left(50\right) = \frac{0.00175*50^3 - 0.25*50^2 + 31.5*50 + 2600}{50} = 75.375$

3. $E_{C/q} = \frac{qC'}{C} = \dfrac{C_m}{C/q} = \dfrac{C_m}{C_M}$ soit $E_{C/q}(50) = \frac{19.125}{75.375} \simeq 0.25$; si à partir d'une quantité de 50, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.25%.

IV EXERCICE-4

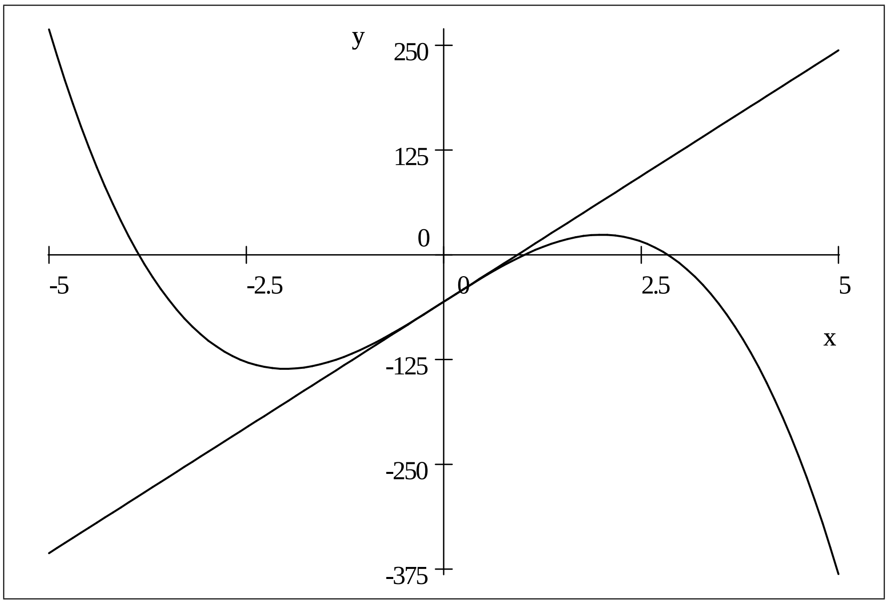
Soit $f\left(x\right) = -5x^3 + 60x - 56$

1. L e domaine est $\left]-\infty; +\infty\right[$ et les limites à l'infini sont celle de $-5x^3$, donc $+\infty$ à $-\infty$ et $-\infty$ à $+\infty$. La dérivée est : $f'\left(x\right) = -15x^2 + 60 = -15\left(x^2 - 4\right) = -15\left(x-2\right)\left(x+2\right)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$y\prime$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-136	$\nearrow$	24	$\searrow$	$-\infty$

2. Convexité : $f"'\left(x\right) = -30x$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en 0, est positive $\left]-\infty; 0\right[$ et négative dans ; la fonction est convexe sur $\left]-\infty; 0\right[$ et concave sur $\left]0; +\infty\right[$; il y a un point d'inflexion $I(0; -56)$.

3. La tangente en I a pour équation : $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$ soit ici : $y = f'\left(0\right)x + f\left(0\right)$ soit $y = 60x - 56$

4. 

V EXERCICE-5

1. $\pi'_x(x,y) = -4x - x^{-0.5}y + 30$ et $\pi'_y(x;y) = -6x - 2x^{0.5} + 50$
   $\pi'_x(4,7) = 10.5$
2. On utilise l'approximation : $f(x_0+h) - f(x_0) \simeq hf'(x_0)$; on calcule $\pi(4,7) = 223$, alors on a :
   $\pi(4.1,7) - \pi(4,7) \simeq 0.1 * \pi'_x(4,7)$ soit $\pi(4.1,7) - \pi(4,7) \simeq 0.1 * 10.5 = 1.05$ ce qui donne $\pi(4.1,7) \simeq \pi(4,7) + 0.1 * 10.5$ soit : $223 + 0.1 * 10.5 = 224.05$, le calcul direct donnant : $\pi(4.1,7) = 224.03$

VI EXERCICE-6

1. On sait que l'élasticité est donnée par la formule : $E_{z/x} = \frac{xz'_x}{z}$, si z est fonction de plusieurs variables. On a donc : $E_{D_x/x} = \frac{xD'_x}{D_x}$;
   calculons la dérivée : $\frac{\partial D_x}{\partial x} = -\frac{35}{3}x^{\frac{2}{3}}$, ce qui donne :
   $E_{D_x/x} = \frac{xD'_x}{D_x} = \frac{x * -\frac{35}{3}x^{\frac{2}{3}}}{D_x} = \frac{-35}{3} * \frac{x^{\frac{5}{3}}}{D_x} = \frac{-35}{3} * \frac{8^{\frac{5}{3}}}{8000 - 7 * 8^{\frac{5}{3}} + 8 * 16^{\frac{7}{2}}} \simeq \boxed{-0.0027}$; Le prix du bien X étant de 8 et celui du bien Y de 16, si on augmente x de 1%, y restant constant, on doit s'attendre à une baisse de la demande du bien X d'environ $-0.0027\,\%$.
2. On sait que l'élasticité croisée est donnée par la formule : $E_{z/y} = \frac{y * z'_y}{z}$,si z est une fonction des deux variables x et y ; on va donc calculer la dérivée partielle : $\frac{\partial D_x}{\partial y} = \frac{56}{2} * y^{\frac{5}{2}}$,d'où : $E_{D_x/y} = \frac{y * 28 * y^{\frac{5}{2}}}{D_x} = \frac{28y^{\frac{7}{2}}}{D_x} = \frac{28 * 16^{\frac{7}{2}}}{8000 - 7 * 8^{\frac{5}{3}} + 8 * 16^{\frac{7}{2}}} \simeq \boxed{3.30}$, ce qui signifie, que le prix du bien X étant de 8 et celui du bien Y de 16, si on augmente y de 1%, x restant constant, on doit s'attendre à une augmentation de la demande du bien Y d'environ 3.30%, ce qui signifie que les biens sont substituables.