CORRIGE DU CONTRÔLE CONTINU

Sujet A du 16 janvier 2007

I EXERCICE-1

$D_x = f(p_x;p_y) = 8500 - 6p_x^2 + 8p_y^{2.5}$

1. $f'_x = -12p_x$ et $f'_y = 8 * 2.5p_y^{1.5} = 20p_y^{1.5}$
2. $p_x = 8$ et $p_y = 16$; $f(8\,;16) = 8500 - 6 * 8^2 + 8 * 16^{2.5} = 16308$. et $f'_x(8\,;16) = -12 * 8 = -96$. On en déduit : $E_{D/P_x} = \dfrac{p_x * f'_x}{f(p_x;p_y)} = \dfrac{8 * -96}{16308} \simeq= -4.71 \times 10^{-2}$. Si à partir d'un prix de 8, p_x augmente de 1%, on doit s'attendre à une baisse de D_X d'environ 0.047 %.
3. l'élasticité croisée de la demande du bien X par rapport au prix $p_y.f'_y(8\,;16) = 20 * 16^{1.5} = 1280$ et $E_{D/P_y} = \dfrac{p_y * f'_y}{f(p_x;p_y)} = \dfrac{16 * 1280}{16308} = 1.26$; donc si le prix de Y augmente de 1%, à partir de 16, on doit s'attendre à une augmentation de la demande de X d'environ 1.26%.

II EXERCICE-2

1. On note $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ l'état de la population l'année 0 et $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ l'état l'année n. $\begin{cases} a_1 = 0.60a_0 + 0.20b_0 \\ b_1 = 0.40a_0 + 0.80b_0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a_1 = 0.60 * 12000 + 0.20 * 5000 = 8200 \\ b_1 = 0.40 * 12000 + 0.80 * 5000 = 8800 \end{cases}$
2. $X_1 = AX_0$ et $X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8200 \\ 8800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6680. \\ 10320 \end{bmatrix}$.
3. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.4$ donc A inversible. On vérifie que : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$, en calculant : $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 0.6 - 0.2 & -0.5 * 0.6 + 0.2 * 1.5 \\ 2 * 0.4 - 0.8 & -0.5 * 0.4 + 0.8 * 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, ce qui prouve que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$
4. $X = \begin{bmatrix} 5692 \\ 11307. \end{bmatrix}$, On a la relation $X_{n+1} = AX_n$, soit : $A^{-1}AX_n = A^{-1}X_{n+1}$ soit : $X_n = A^{-1}X_{n+1}$ et donc l'état l'année précédente est donné par : $Y = A^{-1}X = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5692 \\ 11307. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5730.5 \\ 11268.5 \end{bmatrix}$

III EXERCICE-3.

On considère l'équation matricielle : $X = AX + B$, avec : $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$;

1. $X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B$ soit $(I_2 - A)X = B$; on pose $E = I_2 - A$ et on a bien : $EX = B$, ce qui donne : $E = I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, inverse: $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}$
2. $\det(E) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 25$ donc $\det(E) \neq 0$ et E est inversible. On calcule E^{-1} en résolvant un système : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit : $\begin{bmatrix} 2a - 3c & 5a + 5c \\ 2b - 3d & 5b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit $\begin{cases} 2a - 3c = 1 \\ 5a + 5c = 0 \\ 2b - 3d = 0 \\ 5b + 5d = 1 \end{cases}$; on a en fait deux systèmes de Cramer de même déterminant et on trouve : $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}$.
3. Le système devient : $EX = B \Leftrightarrow X = E^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$