I EXERCICE-1(4pts)

1. Notons A l'événement :" les trois personnes réservent dans trois hôtels différents" ; $\Omega = 5^3 = 125$; par ailleurs, les cas favorables sont les triplets de trois hôtels différents, et $Card\ A = A_5^3$, ce qui donne : $P\left(A\right) = \dfrac{A_5^3}{125} = \dfrac{5*4*3}{125} = 0.48$ soit 48%.
2. $Card\ \Omega = \binom{52}{5} = 2598\,960$
   a. Soit B l'événement : "obtenir exactement deux dames", $Card\ B = \binom{4}{2} * \binom{48}{3} = 103\,776$ et $P\left(B\right) = \dfrac{\binom{4}{2} * \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54\,145} = 3.$ 99×10^{-2}
   b. Soit C l'événement : "obtenir au plus une dame", C est réalisé si et seulement si on a aucune dame ou une dame, donc P $\left(C\right) = \dfrac{\binom{48}{5} + \binom{4}{1} * \binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{51\,888}{54\,145} = 0.958\,3$
   c. $Card\ \Omega = 10!$; appelons D l'événement : "les délégués français et allemands occupent les deux premières places". Il y a 2 façons de placer ces deux délégués (français premier et ammmand deuxième ou le contraire) puis 8! façons de permuter les autres dans les 8 places restantes : $P\left(D\right) = \dfrac{2*8!}{10!} = \frac{1}{45} = 2.22 \times 10^{-2}$
3. $\left(2x+5\right)^4 = 16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625$

II EXERCICE-2(3pts)

On note respectivement H et V les événements "être une femme" et "aimer faire des courses de vêtements".

1. $P\left(H \cap \overline{V}\right) = \dfrac{36}{500} = 0.072$
2. La formule de Poincaré donne : $P\left(H \cup \overline{V}\right) = P\left(H\right) + P\left(\overline{V}\right) - P\left(H \cap \overline{V}\right) = \dfrac{270}{500} + \dfrac{140}{500} - \dfrac{36}{500} = \frac{187}{250} = 0.748$

III EXERCICE-3

$C\left(q\right) = 0.000\,35q^3 - 0.05q^2 + 6.3q + 520$ pour $q \geq 0$

1. $C_m\left(q\right) = C'\left(q\right) = 0.00105q^2 - 0.1q + 6.3$, donc $C_m\left(70\right) = 0.00105 * 70^2 - 0.1 * 70 + 6.3 = 4.445$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la 71 éme unité.
2. Calculer le coût moyen en $C_M\left(q\right) = \frac{0.000\,35q^3 - 0.05q^2 + 6.3q + 520}{q}$ et $C_M\left(70\right) = \frac{0.000\,35*70^3 - 0.05*70^2 + 6.3*70 + 520}{70} = 11.94$
3. $E_{C/q} = \frac{qC'}{C} = \dfrac{C_m}{C/q} = \dfrac{C_m}{C_M}$ soit $E_{C/q}(70) = \frac{4.45}{11.94} \simeq 0.37$; si à partir d'une quantité de 70, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.37%.

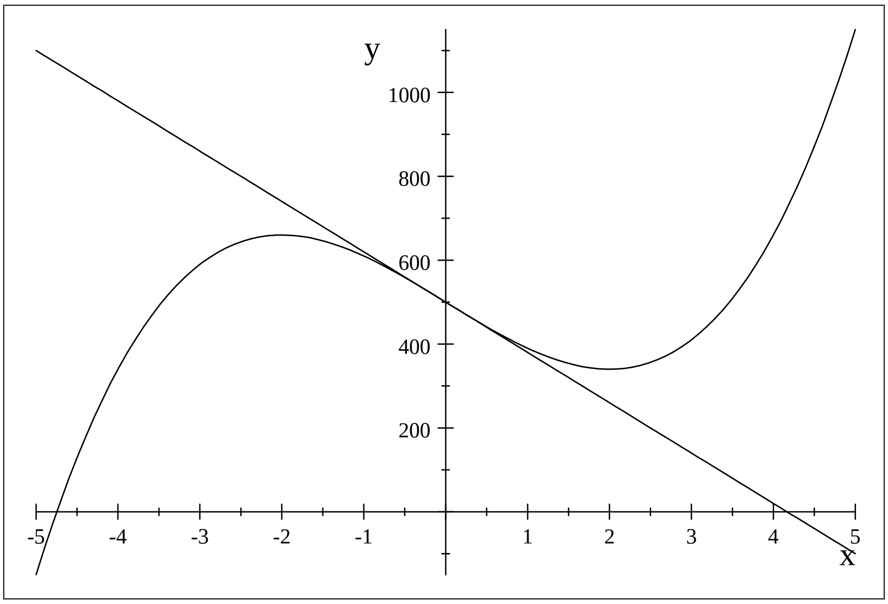
IV EXERCICE-4

Soit $f\left(x\right) = 10x^3 - 120x + 500$

1. L e domaine est $\left]-\infty;+\infty\right[$ et les limites à l'infini sont celle de $10x^3$, donc $+\infty$ à $+\infty$ et $-\infty$ à $-\infty$. La dérivée est : $f'\left(x\right) = 30x^2 - 120 = 30\left(x^2-4\right) = 30\left(x-2\right)\left(x+2\right)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			660				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				340		

2. Convexité : $f''\left(x\right) = 60x$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en 0, est négative sur $\left]-\infty;0\right[$ et positive sur $\left]0;+\infty\right[$. la fonction est concave sur $\left]-\infty;0\right[$ et convexe sur $\left]0;+\infty\right[$; il y a un point d'inflexion $I(0;500)$.
3. La tangente en I a pour équation : $y = f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) + f\left(x_0\right)$ soit ici : $y = f'\left(0\right)x + f\left(0\right)$ soit $y = -120x + 500$

4. 

V EXERCICE-5

1. $-3y - 2x^3 - 2x^{0.5}y^{0.1} + 50y + 30x - 40.$
2. $\pi'_x(x, y) = -6x^2 - x^{-0.5}y^{0.1} + 30$ et $\pi'_y(x; y) = -3 - 0.2x^{0.5}y^{-0.9} + 50$
   $\pi'_y(2, 3) = -3 - 0.2 * 2^{0.5} * 3^{-0.9} + 50 = 46.895$
3. On utilise l'approximation : $f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0) \simeq kf'_y(x_0; y_0)$; on calcule $\pi(2, 3) = -3 * 3 - 2 * 2^3 - 2 * 2^{0.5} * 3^{0.1} + 50 * 3 + 30 * 2 - 40 = 141.84$ alors on a :
   $\pi(2; 3, 2) - \pi(2, 3) \simeq 0.2 * \pi'_y(2, 3)$ soit $\pi(2; 3, 2) = \pi(2, 3) + 0.2 * \pi'_y(2, 3) = 141.84 + 0.2 * 46.895 = 151.22$, le calcul direct donnant : $\pi(2; 3.2) = -3 * 3.2 - 2 * 2^3 - 2 * 2^{0.5} * 3.2^{0.1} + 50 * 3.2 + 30 * 2 - 40 = 151.22$

VI EXERCICE-6

1. On sait que l'élasticité est donnée par la formule : $E_{z/x} = \dfrac{xz'_x}{z}$, si z est fonction de plusieurs variables. On a donc : $E_{D_x/x} = \dfrac{xD'_x}{D_x}$;

   calculons la dérivée : $\dfrac{\partial D_x}{\partial x} = -\dfrac{49}{2}x^{\frac{5}{2}}$, ce qui donne :

   $$E_{D_x/x} = \frac{xD'_x}{D_x} = \frac{x * -\frac{49}{2}x^{\frac{5}{2}}}{D_x} = -\frac{49}{2} * \frac{x^{\frac{7}{2}}}{D_x} = -\frac{49}{2} * \frac{16^{\frac{7}{2}}}{8000 - 7 * 16^{\frac{7}{2}} + 8 * 8^{\frac{5}{3}}} \simeq \boxed{3.77}$$; le prix du bien X étant de 16 et celui du bien Y de 8, si on augmente x de 1%, y restant constant, on doit s'attendre à une augmentation de la demande du bien X d'environ 3.77%.

2. On sait que l'élasticité croisée est donnée par la formule : $E_{z/y} = \dfrac{y * z'_y}{z}$,si z est une fonction des deux variables x et y ; on va donc calculer la dérivée partielle : $\dfrac{\partial D_x}{\partial y} = \dfrac{40}{3} * y^{\frac{2}{3}}$,d'où : $$E_{D_x/y} = \frac{y * \frac{40}{3} * y^{\frac{2}{3}}}{D_x} = \frac{40y^{\frac{5}{3}}}{3D_x} = \frac{40 * 8^{\frac{7}{2}}}{3\left(8000 - 7 * 16^{\frac{7}{2}} + 8 * 8^{\frac{5}{3}}\right)} \simeq \boxed{-0.1814},$$

   ce qui signifie, que le prix du bien X étant de 16 et celui du bien Y de 8, si on augmente y de 1%, x restant constant, on doit s'attendre à une baisse de la demande du bien X d'environ 0.18%, ce qui signifie que les biens sont complémentaires.