CORRIGE DU PARTIEL

Sujet A

I EXERCICE-1

1. Les sites
   a. $\binom{10}{4} = 210$

   b. $A_{10}^{4} = 4!\binom{10}{4} = 840$

2. $P = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{24}{3}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{253}{899} = 0.281\,4$

3. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

   $(5x+2)^5 = 3125x^5 + 6250x^4 + 5000x^3 + 2000x^2 + 400x + 32$

II EXERCICE-2(4pts)

1. Formule de Poincaré : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ soit :
   $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} - 0.3 \ = 0.025$
2. $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.3 = 0.7$
3. $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.025 = 0.275$

III EXERCICE-3$(4pts)$

1. $40000\,(1.0275)^n = 45000$ soit $(1.0275)^n = \dfrac{45000}{40000} = \dfrac{9}{8}$ soit en passant aux logarithmes : $\ln(1.0275)^n = \ln\dfrac{9}{8}$ soit
   $n = \dfrac{\ln\dfrac{9}{8}}{\ln(1.0275)} = 4.34$ ans
2. Domaine : $\begin{cases} \dfrac{x}{3} > 0 \\ (5-x)(x+3) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ soit $D = \,]\,0\,;\,5[\,$; $\ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + \ln(5-x)(x+3) = \ln(x) + \ln(4) \Leftrightarrow \ln(x) - \ln(3) + \ln(5-x)(x+3) = \ln(x) + \ln(4)$ soit $\ln(5-x)(x+3) = \ln(4) + \ln(3)$ soit $\ln(5-x)(x+3) = \ln(12)$ soit $(5-x)(x+3) = 12$ soit $-x^2 + 2x + 3 = 0$ soit $x = -1$ ou $x = 3$ donc $S = \{3\}$.
3. $R(q) = 10q^2e^{-0.05q}$ et $E_{R/q} = \dfrac{qR'}{R} = \dfrac{q\left(-\dfrac{1}{2}q\left(e^{-0.05q}\right)(q-40)\right)}{10q^2e^{-0.05q}}$ car $R'(q) = 20qe^{-0.05q} - 0.5q^2e^{-0.05q} = -\dfrac{1}{2}q\left(e^{-0.05q}\right)(q-40)$; en simplifiant $E_{R/q} = -\dfrac{1}{20}(q-40)$ soit pour $q = 100$, $E_{R/q}(100) = -\dfrac{1}{20} * 60 = -3$. Pour une augmentation de la quantité de 1%, on doit s'attendre à une baisse de la recette de 3%.

IV EXERCICE-4$(1pt)$

$\pi'_x(x\,;\,y) = -6x - 4xy + 50y$ et $\pi'_y(x\,;\,y) = -4y - 2x^2 + 50x + 30$

V EXERCICE-5$(4pts)$

1. $V(0) = \dfrac{80}{53} \simeq 1.51$ et $V(20) = \dfrac{80}{1+52e^{-0.6*20}} \simeq 79.97$.
2. $\dfrac{80}{1+52e^{-0.6t}} = 45 \Leftrightarrow 80 = 45\left(1+52e^{-0.6t}\right)$ soit $e^{-0.6t} = \dfrac{1}{52}\left(\dfrac{80}{45} - 1\right) = \dfrac{7}{468}$ soit $-0.6t = \ln\dfrac{7}{468}$ou $t = -\dfrac{1}{0.6}\ln\dfrac{7}{468} \simeq \boxed{7}$

3. $V'(t) = -\dfrac{80 * 52\,(-0.6)\,e^{-0.6t}}{(1+52e^{-0.6t})^2} = 2496\dfrac{e^{-0.6t}}{(52e^{-0.6t}+1)^2} > 0$; par ailleurs : $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \dfrac{80}{1+52e^{-0.6*20}} = 80$

car $e^{-0.6t} \longrightarrow 0$.

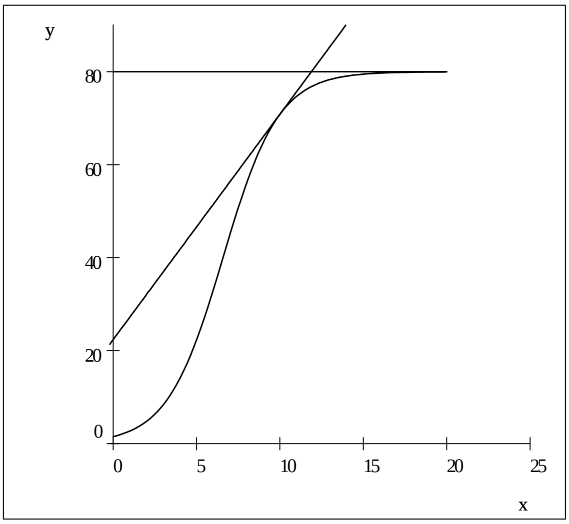
0	0		$+\infty$
$V\prime$			
V	$\frac{80}{53}$	$\nearrow$	80

4. Le coefficient directeur de la tangente est $V'(10) = 2496\dfrac{e^{-6}}{(52e^{-6}+1)^2} \simeq 4.85$. La tangente a pour équation :

$y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ soit $y = 4.85\,(x-10)+y_0$ avec $y_0 = V(10) = \dfrac{80}{1+52e^{-6}} = 70.87$ soit : $y = 4.85\,(x-10)+70.87$

ou $\boxed{y = 4.85x + 22.37}$

$y = 20\,(x-27.5)+500.7 = 20x - 49.3$



VI EXERCICE-6$(3pts)$

On calcule la dérivée première et la dérivée seconde, la convexité étant donnée par le signe de f".

$f(x) = e^{-x^2+x+5}$ et $f'(x) = (1-2x)\,e^{x-x^2+5}$ et $f"(x) = (1-2x)^2\,e^{x-x^2+5} - 2e^{x-x^2+5} = \left(e^{x-x^2+5}\right)\left(4x^2-4x-1\right)$; le trinôme admet pour racines : $x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ et $x" = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, ce qui donne :

$-\infty$		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$		$+\infty$
$y"$	$+$	0	$-$	0	$+$	
	convexe	Inflexion	concave	Inflexion	convexe	

.