L2

# DENOMBRER

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ♣ |
| | | ♣ | ♣♣ |
| | ♣ | ♣♣ | ♣♣♣ |
| ♣ | ♣♣ | ♣♣♣ | ♣♣♣♣ |
| 1 | 3 | 6 | 10 |

LES NOMBRES TRIANGULAIRES CONNUS DES BABYLONIENS 2000 ANS AVANT J.C.

## I INTRODUCTION

Les problèmes de dénombrement semblent avoir été abordés vers les derniers siècles de l'antiquité. Dès le début de l'ère chrétienne,les Chinois, passionnés par les jeux de hasard reconnurent la signification des expressions algébriques dans les problèmes de probabilité.

les combinaisons (coefficients binomiaux : $\binom{n}{p}$) n'apparaissent qu'au XII ème siècle où on les trouve chez le mathématicien hindou BHASKARA.

La formule du binôme parait connue des arabes dès le XIII ème siècle. mais n'est retrouvée en occident qu'au début du XVI ème Siècle.

L'astronome arabe. poète et mathématicien OMAR KHAYYAM connaissait le triangle chinois dit "de PASCAl", du fait de son exposition dans un traité posthume de l'auteur (1 665} au XVI ème siècle. L'impression des premiers traités chinois est postérieure, mais ceùx-ci présentent le triangle comme quelque chose de connu depuis fort longtemps .

## II L'UNIVERS

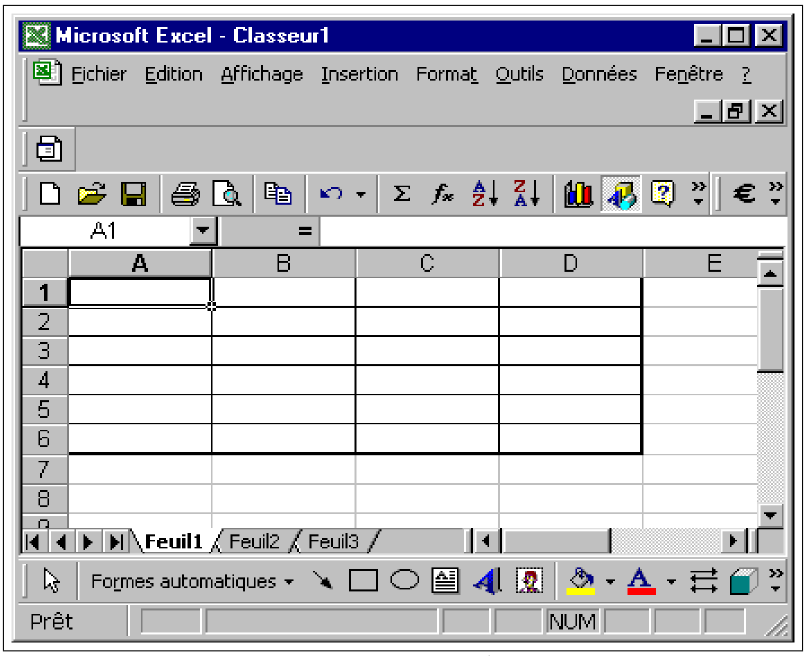
Depuis des lustres, l'homme est en proie au démon du jeu .Dans l'antiquité, l'examen des entrailles et du vol des oiseaux servait à lever le voile du futur. Songeons au comte Sandwich, qui invente l'immortel casse-croûte afin de pouvoir se restaurer sans quitter la table de jeu.L'origine du mot hasard est lié au jeu de dé, le mot arabe az-zahr signifiant le dé. Quand on effectue une expérience aléatoire, on est amené à considérer l'ensembles des résultats possibles que l'on regroupe dans un ensemble appelé univers des cas possibles et traditionnellement noté $\Omega$. Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers est : $\Omega = \{1.2.3.4.5.6.\}$ ; trés souvent on s'intéressera à une partie de l'univers, que l'on appelle événement ; dans l'exemple précédent, on peut s'intéresser à l'événement A : "le résultat du lancer de dé est pair " ; cet événement est : $A = \{2.4.6.\}$ .

Pour déterminer le nombre de cas possibles d'une expérience aléatoire ou le nombre de résultats d'un événement, on doit apprendre à dénombrer.

## III LE PRODUIT CARTESIEN

1. Introduction: Le siècle où vécut René Descartes (1596-1650) constitue une très grande période intellectuelle de la civilisation ; il eut comme comme contemporains, notamment Fermat, Pascal, Galilée, pour ne citer qu'eux, et fut suivi de près par Newton...

   Descartes parlait d'une clef magique qui était apparue dans un rêve et qui devait lui ouvrir l'accès aux trésors de la nature, par l'application de l'algèbre à la géométrie : le 10 novembre 1619 naissait la géométrie analytique ; c'était le début des mathématiques modernes.
2. **Le Produit Cartésien**



Descartes et Excel

Dans le tableau suivant comment caractériser l'ensemble des cellules ?
Dans Excel une cellule est caractérisée par une référence, par exemple $A3$ (colonne A, ligne 3)
On note :
$L = \{A; B; C; D\}$ et $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
On définira l'ensemble de ces cellules par :
$\boxed{P = L \times N \text{ **Produit Cartésien** :}}$
c'est-à dire l'ensemble des couples $(x; y)$
,où $x$ est une lettre de $L$ et $y$ un nombre de $N$

$$Card\,(L \times N) = Card\,(L)\,Card\,(N) = 4 * 6 = 24$$

3. Représentation par un arbre (modèle multiplicatif)

| | | Lettres | | Nombres | | Cellules (30) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\nearrow$ | 1 | $\longrightarrow$ | $A1$ |
| | | | $\nearrow$ | 2 | $\longrightarrow$ | $A2$ |
| | | $A$ | $\nearrow$ | 3 | $\longrightarrow$ | $A3$ |
| | | | $\searrow$ | 4 | $\longrightarrow$ | $A4$ |
| | | | $\searrow$ | 5 | $\longrightarrow$ | $A5$ |
| | | | $\searrow$ | 6 | $\longrightarrow$ | $A6$ |
| | $\nearrow$ | | | | | |
| | $\nearrow$ | $B$ | | idem | | $6\,cellules\}$ |
| $\star$ | $\longrightarrow$ | $C$ | | idem | | $6\,cellules\}$ |
| | $\searrow$ | $D$ | | idem | | $6\,cellules\}$ |
| | $\searrow$ | | | | | |
| | | | $\nearrow$ | 1 | $\longrightarrow$ | $E1$ |
| | | | $\nearrow$ | 2 | $\longrightarrow$ | $E2$ |
| | | $E$ | $\nearrow$ | 3 | $\longrightarrow$ | $E3$ |
| | | | $\searrow$ | 4 | $\longrightarrow$ | $E4$ |
| | | | $\searrow$ | 5 | $\longrightarrow$ | $E5$ |
| | | | $\searrow$ | 6 | $\longrightarrow$ | $E6$ |

4. Généralisation
   a. En géométrie analytique quand on travaille en dimension 2, dans un plan, chaque point est repéré dans un repère cartésien par un couple de coordonnées $(x; y)$ élément de $R^2$ou $R \times R$ ; en dimension 3, dans l'espace, chaque point est repéré dans un repère cartésien par un triplet de coordonnées $(x; y; z)$ élément de $R^3$ou $R \times R \times R$ ; en relativité, on est en dimension 4,la quatrième dimension étant le temps : $(x; y; z; t) \in R^4$.
   b. Exemples probabilistes

      E1-Pile ou face : on lance trois fois de suite une pièce et on note $\Omega$,l'univers des cas possibles (ensemble des résultats) ; $\Omega = \{P; F\}^3$; il y a donc Card $\Omega = 2^3 = 8$ résultats possibles ; par exemple $(p; p; f)$ est un des résultats possibles ; on le nomme triplet ou $3 - uplet$ ce qui permet de généraliser à un $\mathbf{n} - \mathbf{uplet}$ (suite ordonnée de $n$ éléments)

      E2-On lance un dé, deux fois de suite.Un résultat possible de cette expérience aléatoire est un couple, par exemple : $(5; 4)$ ou $(5; 5)$ .L'univers des cas possibles est : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2 = [|1; 6|]^2$.notation où $[|1; 6|]$ désigne tous les entiers naturels de 1 à 6 inclus.Autrement dit il y a 36 résultats possibles. Cet univers peut-être représenté par un arbre, par les 36 points placés dans un repère et dont l'abscisse et l'ordonnée peuvent prendre toutes les valeurs entières de 1à 6(rectangle délimité par les points $A(1; 1), B(6; 1); C(6; 1)$ et $D(1; 6)$) ou encore par un tableau à double entrée (principe du tableur)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1;1)$ | $(1;2)$ | $(1;3)$ | $(1;4)$ | $(1;5)$ | $(1;6)$ |
| 2 | $(2;1)$ | $(2;2)$ | $(2;3)$ | $(2;4)$ | $(2;5)$ | $(2;6)$ |
| 3 | $(3;1)$ | $(3;2)$ | $(3;3)$ | $(3;4)$ | $(3;5)$ | $(3;6)$ |
| 4 | $(4;1)$ | $(4;2)$ | $(4;3)$ | $(4;4)$ | $(4;5)$ | $(4;6)$ |
| 5 | $(5;1)$ | $(5;2)$ | $(5;3)$ | $(5;4)$ | $(5;5)$ | $(5;6)$ |
| 6 | $(6;1)$ | $(6;2)$ | $(6;3)$ | $(6;4)$ | $(6;5)$ | $(6;6)$ |

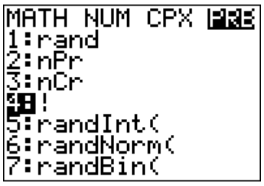
c. Exercice: Un restaurant chinois présente une carte comprenant 17 entrées , 20 plats et 10 desserts.Combien peut-on former de menus ?
Vous comprendrez sans doute que très souvent on peut commencer un arbre pour visualiser la situation mais qu'on ne cherchera pas nécessairement, à part les insomniaques, à le finir.

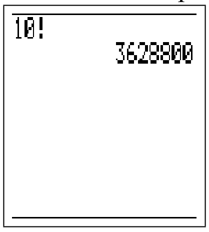
d. On lance quatre dés, dont les faces sont numérotées de 1à 6.Quel est l'univers des résultats possibles et quel est son cardinal ?

# IV LES TECHNIQUES DE DENOMBREMENT

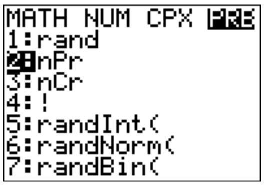
## IV.1 DES EXEMPLES

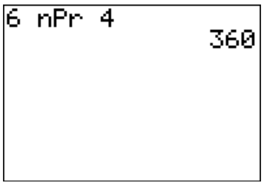
1. **PERMUTATIONS**
   a. Quatre personnes ayant le permis de conduire partent en week-end; de combien de façons peuvent -elles s'installer dans la voiture ?
   b. Combien peut-on écrire de nombres formés de quatre chiffres distincts, avec les chiffres 2, 4,6, et 8 ?
   c. On désire former un sigle de trois lettres distinctes avec les lettres E, D et F; former tous les sigles possibles et compter les.
   d. 10 personnes ont décidé de se retrouver tous les midi et tous les soirs au restaurant, jusqu'à avoir épuisé les différentes possibilités de se placer à table; calculer combien de temps elles devront ainsi prendre leurs repas en commun.
   e. $\boldsymbol{Déf\,inition}$ : Faire une permutation dans un ensemble de $n$ éléments, consiste à les ordonner. Le nombre de possibilités est appelé factorielle $n$ et noté $n!$.
   $$n! = n\,(n-1)\,.......*1$$
   f. Avec la calculatrice : calcul de 10! avec la calculatrice : on commence par rentrer 10, puis on utilise le menu MATH, puis on met PRB(probabilité) en surbrillance en se déplaçant vers la droite, enfin on tape 4 et on obtient le résultat.



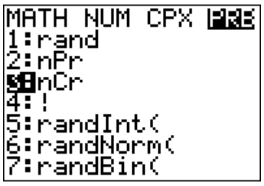


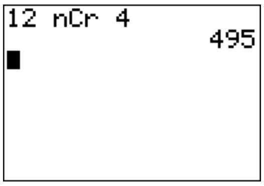

2. **ARRANGEMENTS**: Ordre
   a. Le digicode d'un immeuble doit comporter un code formé de 4 chiffres distincts et d'une lettre, le tout dans un certain ordre; donner 4 exemples de codes possibles et donner le nombre total de possibilités.
   b. Une course de chevaux comporte 12 partants; combien y a-t-il de tiercés possibles ? combien de quintés ?
   c. Un groupe de 5 touristes, a réservé 5 chambres dans un hôtel dans lequel il reste 8 chambres de libres; combien y-a-t-il d'affectations possibles de ces touristes ?
   Remarque : On parle aussi d'arrangement d'ordre $p$ sans répétition, ou de $p - liste$ d'éléments distincts de $E$. ( $p - uplet$ ); un $2 - uplet$ est un couple.
   d. $\boldsymbol{Déf\,inition}$ : Faire un arrangement d'ordre $p$ dans un ensemble de $n$ éléments, c'est choisir $p$ éléments de E et les ordonner. Le nombre de possibilités est noté $A_n^p$ (pour $n \geq p$ ). Calcul de $A_n^p$ : on a $n$ choix pour le premier élément, $(n-1)$ pour le second, etc., le seul problème étant le nombre de choix pour le dernier, c'est-à dire le $p$ ème ; avant lui on a choisi $(p-1)$ , il en reste donc : $n-(p-1)$ soit $(n-p+1)$ ; le résultat est donc :
   $$A_n^p = \underbrace{n\,(n-1)\,........\,(n-p+1)}_{\text{p termes}}$$
   Exemples : $A_4^2 = 4*3 = 12$ ; $A_6^4 = 6*5*4*3 = 360$ ; $A_6^6 = 6*5*4*3*2*1 = 720$
   e. **Avec la calculatrice** : $A_6^4$ rentrer 6 (le plus grand) puis accéder au menu MATH, PRB, taper 2 (nPr) puis 4.

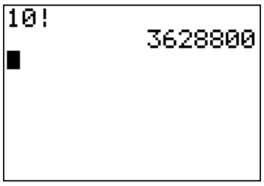



3. **COMBINAISONS** : pas d'ordre
   a. On considère un tournoi sportif engageant $n$ équipes, et dans lequel chaque équipe doit rencontrer chacune des autres; on appelle $N$ le nombre total de matchs.
   Déterminer $N$ dans les cas suivants : $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.
   La formule $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$ vous paraît-elle convenir ? Calculer $N$ pour $n = 11$.
   b. A l'issue d'une réunion de travail, les invités, courtois, se séparent en se serrant la main. Combien y-aura-t-il de poignées de mains s'il y a 10 participants ?
   c. Combien y-a-t-il de possibilités de choisir deux cartes dans un jeu de 32 cartes ?
   d. Une entreprise emploie 5 menuisiers et doit envoyer une équipe de trois menuisiers sur un chantier; combien y-a-t-il de choix possibles ?
   e. ***Définition*** :On appelle combinaison d'ordre $p$ dans un ensemble E de cardinal $n$ , tout sous ensemble formé de $p$ éléments distincts de E.
   On ne tient pas compte de l'ordre, il y en a donc moins de combinaisons que d'arrangements ; ainsi avec les chiffres de 0 à 6, on peut former $A_7^2 = 42$ nombres formés de deux chiffres distincts (y compris 04...), mais combien de dominos non doubles (formés de chiffres distincts) ? le domino $\{5;4\}$ est évidemment le même que le domino $\{4;5\}$ , il y a donc seulement 21 dominos non doubles, c'est à dire 21 combinaisons d'ordre 2.
   Plus généralement, le nombre de combinaisons d'ordre $p$ est le nombre d'arrangements divisé par $p!$.
   $$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$
   Notation :On note $\binom{n}{p}$et on lit "p éléments choisis parmi $n$",le nombre de combinaisons d'ordre $p$ dans un ensemble de $n$ éléments (la notation $C_n^p$ devant être abandonnée).
   f. Avec la calculatrice
   Calcul de $\binom{12}{4}$ : Rentrer 12 (le plus grand) puis accéder au menu MATH, PRB, taper 3 (nCr) puis taper 4 :



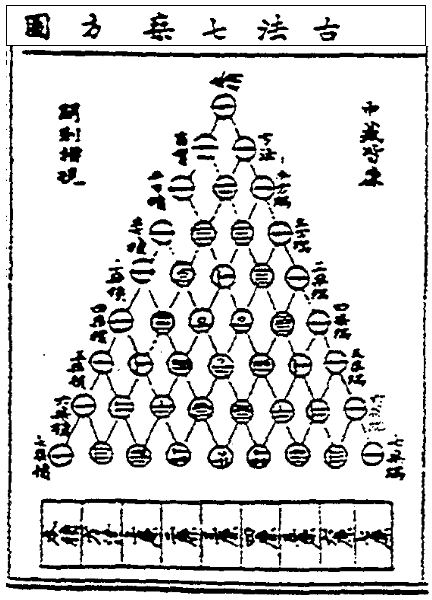

4. **APPLICATIONS QUELCONQUES**
   a. On doit ranger deux dossiers dans 3 armoires, chacune pouvant contenir éventuellement les deux dossiers. Représenter l'ensemble des possibilités par un arbre, puis justifier que l'ensemble des possibilités peut être assimilé au produit cartésien $A^2$, $A$ désignant l'ensemble des armoires. Combien y en a -t-il ? même question avec 3 dossiers, 4 , 10 en supposant que chaque armoire peut éventuellement les contenir tous.
   b. Un autobus démarre avec 15 passagers et sa ligne comporte 20 arrêts; combien y-a-t-il de possibilités de répartitions des voyageurs aux différents arrêts ?
   c. ***Théorème*** : Soient deux ensembles $E$ et $F$ de cardinaux respectifs $n$ et $p$,il existe :

$\boxed{p^n \text{ applications de } E \text{ vers } F.}$

5. **Rappel : LES FORMULES**

| Applications quelconques | Factorielle | Arrangements : Ordre | Combinaisons : |
|---|---|---|---|
| $n-uplets$ Il y a $p^n$applications de $E_n$ dans $F_p$ | $n! = n(n-1)*...*2*1$ Convention : $0! = 1$ | $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $\underbrace{n(n-1)(n-2)*...*(n-p+1)}_{\text{P FACTEURS}}$ | $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$ |

6. Pascal, Newton...
   a. Le triangle chinois (1303) ou de Pascal

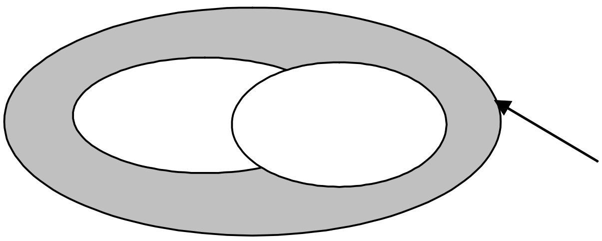


| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | $p-1$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| | | | | | | | | |
| $n-1$ | | | | | | | $\binom{n-1}{p-1}$ | $\binom{n}{p-1}$ |
| $n$ | | | | | | | | $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n}{p-1}$ |

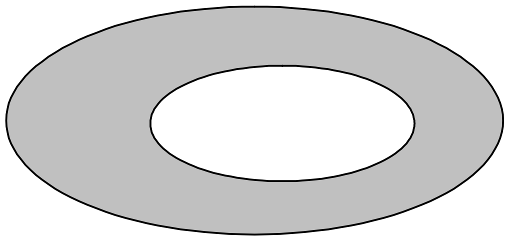
La formule du **Binôme de Newton** : $\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=1}^{k=n}\binom{n}{k}a^k*b^{n-k}}$

# V OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

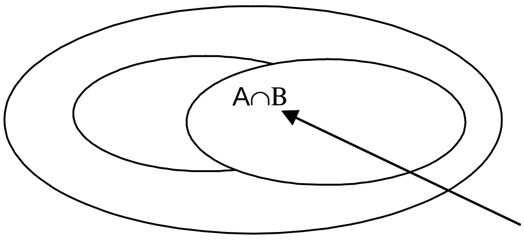
On considère une expérience aléatoires et $\Omega$ l'univers des cas possibles . On rappelle qu'un événement $A$ est une partie de $\Omega$, et que l'on note : $A\subset\Omega$ .



La Réunion (OU) : $A\cup B$



Le complémentaire : $\overline{A}$




L'intersection (ET) : $A\cap B$

1. Intersection : $A\cap B$ : $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ et $x\in B$. $\{1;3;5\}\cap\{4;5\}=\{5\}$ .
2. Evénement contraire de $A$, noté $\overline{A}$ : si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé honnête, alors $\Omega$ = $[|1;6|]$ et si $A$ désigne l'événement : le résultat est pair, $\overline{A}=\{1;3;5\}$ .Les événements $A$ et $\overline{A}$ sont **disjoints ou incompatibles**, car ils ne peuvent se réaliser simultanément : $A\cap\overline{A}=\varnothing$.
3. La réunion : $A\cup B$ : $x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ ou $x\in B$ par exemple : $\{1;3;5\}\cup\{2;5\}=\{1;3;5;2\}$
4. L'intersection : $A\cap B$: c'est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ ET à $B$
5. La réunion

$A \cup B$: c'est l'ensemble des éléments appartenant à $A$ OU à $B$, le $OU$ étant inclusif (contraire de exclusif), ce qui signifie que les éléments peuvent appartenir à $A$ et à $B$ ; en clair : $A \cap B \subset A \cup B$

6. Le complémentaire : si $E$ est un ensemble et $A$ une partie de $A$,on note $C_E(A)$,appelé le complémentaire de $E$ dans $A$,l'ensemble des éléments de $E$ n'appartenant pas à $A$.Cet ensemble est noté $\overline{A}$ en probabilité ; on a : $\begin{cases} A \cup \overline{A} = E \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$

7. **<u>LA FORMULE DE POINCARE</u>** Henri (1854-1912 ,principe d'exclusion-inclusion)

$$\boxed{\mathbf{Card}(A \cup B) = \mathbf{Card}(A) + \mathbf{Card}(B) - \mathbf{Card}(A \cap B)}$$

8. **CAS PARTICULIER IMPORTANT** : **L'additivité** si **A et B sont disjoints ou incompatibles, on a :** $\mathbf{Card}(A \cup B) = \mathbf{Card}(A) + \mathbf{Card}(B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

# VI INTRODUCTION AUX PROBABILITES

*Table TF 00-02*

| âge x | Lx nbr de vivants | âge x | Lx nbr de vivants | âge x | Lx nbr de vivants |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 38 | 98 435 | 76 | 79 402 |
| 1 | 99 616 | 39 | 98 343 | 77 | 77 633 |
| 2 | 99 583 | 40 | 98 242 | 78 | 75 671 |
| 3 | 99 562 | 41 | 98 130 | 79 | 73 496 |
| 4 | 99 545 | 42 | 98 007 | 80 | 71 088 |
| 5 | 99 531 | 43 | 97 872 | 81 | 68 423 |
| 6 | 99 519 | 44 | 97 724 | 82 | 65 478 |
| 7 | 99 508 | 45 | 97 563 | 83 | 62 233 |
| 8 | 99 498 | 46 | 97 387 | 84 | 58 680 |
| 9 | 99 488 | 47 | 97 197 | 85 | 54 828 |
| 10 | 99 478 | 48 | 96 993 | 86 | 50 706 |
| 11 | 99 647 | 49 | 96 776 | 87 | 46 362 |
| 12 | 99 456 | 50 | 96 546 | 88 | 41 868 |
| 13 | 99 444 | 51 | 96 304 | 89 | 37 319 |
| 14 | 99 431 | 52 | 96 049 | 90 | 32 821 |
| 15 | 99 415 | 53 | 95 778 | 91 | 28 469 |
| 16 | 99 395 | 54 | 95 489 | 92 | 24 328 |
| 17 | 99 371 | 55 | 95 180 | 93 | 20 444 |
| 18 | 99 342 | 56 | 94 851 | 94 | 16 860 |
| 19 | 99 309 | 57 | 94 501 | 95 | 13 618 |
| 20 | 99 274 | 58 | 94 131 | 96 | 10 750 |
| 21 | 99 239 | 59 | 93 741 | 97 | 8 277 |
| 22 | 99 205 | 60 | 93 329 | 98 | 6 204 |
| 23 | 94 171 | 61 | 92 892 | 99 | 4 516 |
| 24 | 99 137 | 62 | 93 425 | 100 | 3 185 |
| 25 | 99 103 | 63 | 91 923 | 101 | 2 171 |
| 26 | 99 068 | 64 | 91 382 | 102 | 1 426 |
| 27 | 99 033 | 65 | 90 797 | 103 | 900 |
| 28 | 98 997 | 66 | 90 164 | 104 | 544 |
| 29 | 98 960 | 67 | 89 476 | 105 | 314 |
| 30 | 98 921 | 68 | 88 726 | 106 | 172 |
| 31 | 98 879 | 69 | 87 907 | 107 | 89 |
| 32 | 98 833 | 70 | 87 010 | 108 | 44 |
| 33 | 98 782 | 71 | 86 024 | 109 | 20 |
| 34 | 98 725 | 72 | 84 941 | 110 | 9 |
| 35 | 98 662 | 73 | 83 751 | 111 | 4 |
| 36 | 98 593 | 74 | 82 442 | 112 | 1 |
| 37 | 98 518 | 75 | 80 998 | | |

# DENOMBRER

**Table TH 00-02**

| âge x | Lx nbr de vivants | âge x | Lx nbr de vivants | âge x | Lx nbr de vivants |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 000 | 38 | 96 765 | 76 | 58 718 |
| 1 | 99 511 | 39 | 96 576 | 77 | 56 072 |
| 2 | 99 473 | 40 | 96 369 | 78 | 53 303 |
| 3 | 99 446 | 41 | 96 141 | 79 | 50 411 |
| 4 | 99 424 | 42 | 95 887 | 80 | 47 390 |
| 5 | 99 406 | 43 | 95 606 | 81 | 44 234 |
| 6 | 99 390 | 44 | 95 295 | 82 | 40 946 |
| 7 | 99 376 | 45 | 94 952 | 83 | 37 546 |
| 8 | 99 363 | 46 | 94 575 | 84 | 34 072 |
| 9 | 99 350 | 47 | 94 164 | 85 | 30 575 |
| 10 | 99 338 | 48 | 93 720 | 86 | 27 104 |
| 11 | 99 325 | 49 | 93 244 | 87 | 23 707 |
| 12 | 99 312 | 50 | 92 736 | 88 | 20 435 |
| 13 | 99 296 | 51 | 92 196 | 89 | 17 338 |
| 14 | 99 276 | 52 | 91 621 | 90 | 14 464 |
| 15 | 99 250 | 53 | 91 009 | 91 | 11 852 |
| 16 | 99 213 | 54 | 90 358 | 92 | 9 526 |
| 17 | 99 163 | 55 | 89 665 | 93 | 7 498 |
| 18 | 99 097 | 56 | 88 929 | 94 | 5 769 |
| 19 | 99 015 | 57 | 88 151 | 95 | 4 331 |
| 20 | 98 921 | 58 | 87 329 | 96 | 3 166 |
| 21 | 98 820 | 59 | 86 460 | 97 | 2 249 |
| 22 | 98 716 | 60 | 85 538 | 98 | 1 549 |
| 23 | 98 612 | 61 | 84 558 | 99 | 1 032 |
| 24 | 98 509 | 62 | 83 514 | 100 | 663 |
| 25 | 98 406 | 63 | 82 399 | 101 | 410 |
| 26 | 98 303 | 64 | 81 206 | 102 | 244 |
| 27 | 98 198 | 65 | 79 926 | 103 | 139 |
| 28 | 98 091 | 66 | 78 552 | 104 | 75 |
| 29 | 97 982 | 67 | 77 078 | 105 | 39 |
| 30 | 97 870 | 68 | 75 501 | 106 | 19 |
| 31 | 97 756 | 69 | 73 816 | 107 | 9 |
| 32 | 97 639 | 70 | 72 019 | 108 | 4 |
| 33 | 97 517 | 71 | 70 105 | 109 | 2 |
| 34 | 97 388 | 72 | 68 070 | 110 | 1 |
| 35 | 97 249 | 73 | 65 914 | 111 | |
| 36 | 97 100 | 74 | 63 637 | 112 | |
| 37 | 96 939 | 75 | 61 239 | | |

1. Les fonctions biométriques

   On considère la table de mortalité d'un groupe (d'une cohorte selon l'expression consacrée en démographie) de 100 000 individus nés à une même date x ; cette fonction donne l'effectif du nombre de survivants ayant l'âge $x$ (exprimé en années).On note $l\left(x\right)$ le nombre de survivants à l'âge $x$ . et $d_x$ le nombre de personnes décédées entre l'âge $x$ et l'âge $x+1$.

   Les tables de mortalité ont été établies en suivant une cohorte de 100000 personnes, de sexe féminin (table vie) ou masculin (table décès) et en notant le nombre de vivants à l'âge x, noté ici l(x).

   Les assureurs constatent que la mortalité de leur clientelle est différente de la mortalité de la population et que les assurés qui contractent une assurance en cas de vie ont une mortalité plus faible que ceux qui contractent une assurance en cas de décès. Le code des assurances impose d'utiliser pour les assurances en cas de décès la table masculine (TD) et pour les assurances en cas de vie la table féminine (TV). Les compagnies d'assurance établissent ainsi leurs tarifs sur les hypothèses "pessimistes", qui conduisent aux tarifs les plus élevés. Cette prudence vise à faire obstacle à la ruine de l'assureur et donc à garantir la sécurité des contrats.

Quelques questions pour se familiariser avec ces tables.

a. Quelle est la probabilité qu'un homme de 20 ans soit encore en vie à 21ans ?

b. Quelle est la probabilité pour un homme de 20 ans de décéder avant ses 21 ans ?

c. Quelle est la probabilité pour un homme de 20 ans de décéder à 70 ans ?

d. Quelle est la probabilité pour qu'une femme de 30 ans soit encore en vie à 60 ans ?

e. Quelle est la probabilité pour qu'une femme de 30 ans décède avant ses 60 ans ?

f. Quelle est la probabilité pour qu'une femme de 30 ans décède entre 60 ans et 70 ans ?

Avec les tables de mortalité on a pu calculer des probabilités sans technique particulière, mais le calcul des probabilités nécessite une théorie et beaucoup de rigueur, nous allons aborder maintenant cette théorie.

## VII-MESURE DE PROBABILITE

1. Il s'agit ici d'introduire la notion de mesure, c'est à dire à partir d'une expérience aléatoire, d'associer à chaque événement de l' univers un nombre compris entre 0 et 1 et qui mesure sa probabilité de réalisation, 0 mesurant l'impossible et 1 le certain.

2. ***Ensemble des événements*** : si $\Omega$ désigne l'univers, on note $\mathcal{P}(\Omega)$ , l'ensemble des parties de $\Omega$, c'est-à dire l'ensemble des événements. Prenons l'exemple d'une pièce qui peut être éclairée par 3 éclairages indépendants, notés $L_1, L_2, L_3$ et déterminons toutes les possibilités d'éclairage de cette pièce : on peut dresser un arbre en décidant d'un "code binaire" : $\begin{cases} 1 : \text{on allume la lampe} \\ 0 : \text{on n'allume pas la lampe} \end{cases}$

et représenter la situation par un **ARBRE** :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ↗ | **1** | 111 | $\{L_1, L_2, L_3\}$ |
| | | | | **1** | | | | |
| | | | ↗ | | ↘ | **0** | 110 | $\{L_1, L_2\}$ |
| | | **1** | | | | | | |
| | ↗ | | ↘ | | ↗ | **1** | 101 | $\{L_1, L_3\}$ |
| | | | | **0** | | | | |
| ► | | | | | ↘ | **0** | 100 | $\{L_1\}$ |
| ► | | | | | ↗ | **1** | 011 | $\{L_2, L_3\}$ |
| | | | | **1** | | | | |
| | ↘ | | ↗ | | ↘ | **0** | 010 | $\{L_2\}$ |
| | | **0** | | | | | | |
| | | | ↘ | | ↗ | **1** | 001 | $\{L_3\}$ |
| | | | | **0** | | | | |
| | | | | | ↘ | **0** | 000 | $\varnothing$ |

Representation par un arbre de l'ensemble des parties de $\Omega$

On voit ainsi sur cet exemple, que l'ensemble des parties de l'univers est constitué de 8 événements ; l'ensemble $\varnothing$ (aucune lampe), les trois singletons (événements élémentaires), les trois paires et l'univers lui-même. On voit sur cet exemple que $Card\mathcal{P}(\Omega) = 2^3$, car pour constituer une partie de l'univers , on a pour chacun des éléments deux possibilités : soit on le prend, soit on le laisse.On notera aussi que $Card\mathcal{P}(\Omega) = 2^3$ correspond à la somme des termes de la troisième ligne du triangle de Pascal :

$$\underbrace{\binom{3}{0}}_{Vide} + \underbrace{\binom{3}{1}}_{Singletons} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{paires} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{univers} = 2^3.$$

Plus généralement, on démontre que pour un univers $\Omega$ de cardinal $n$, on a :

$$Card\mathcal{P}(\Omega) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ....... + \binom{n}{n} = 2^n$$

Remarque : la formule du binôme de Newton, appliquée pour $a = b = 1$ donne : $(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + .... + \binom{n}{k} + ... + \binom{n}{n}$ soit $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ....... + \binom{n}{n} = 2^n$.

3. MESURE DE PROBABILITE

On appelle mesure de probabilité définie sur un univers $\Omega$, toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\varnothing) = 0$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \;\; : Axiome\ de\ Kolmogorov$$

4. Propriétés :

a. Formule de Poincaré : $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)}$

b. $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)}$ et de même : $\boxed{\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})}$

5. **Cas d'une probabilité uniforme**:
   a. Définition 1: On dit que des événements sont ***équiprobables***, si et seulement si : $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.
   b. Définition 2: On dit que la probabilité est uniforme, si tous les événements élémentaires sont équiprobables. Exemples : jeu de pile ou face avec une pièce non truquée : $\mathbf{P}(pile) = \mathbf{P}(face) = \frac{1}{2}$. jeu de dés non truqués, avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ pour chaque face.
   c. Si la probabilité est uniforme, on calcule $\mathbf{P}(A)$ par la formule suivante :
   $$\mathbf{P}(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$
   d. Exemple: Un conseil municipal est constitué de 10 conseillers; le conseil a décidé de constituer 3 commissions, une relative à l'urbanisme formée de deux conseillers, une relative à la citoyenneté formée de trois conseillers et la dernière relative au logement et formée de 5 conseillers.
      i. Combien y-a-t-il de possibilités de constituer ces trois commissions ?
      ii. En supposant que ces commissions soient constituées au hasard, quelle est la probabilité pour que deux conseillers donnés, M.U. et Mme.V. soient dans la même commission ?

# VIIIEXERCICES

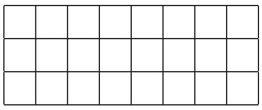
1. Ecrire :
   a. Combien peut-on écrire de mots de 6 lettres avec les 26 lettres de l'alphabet ?
   b. Combien de ces mots sont écrits avec des lettres distinctes?
   c. Combien peut-on écrire de mots de 6 lettres tels que deux lettres consécutives soient distinctes ?
2. Préciser l'univers $\Omega$, dans les expériences aléatoires suivantes : (on débutera **un arbre** dans chaque exemple)
   a. Jouer à pile ou face 10 fois de suite.
   b. Lancer un dé 6 fois de suite.
   c. Répondre à un QCM qui comprend 20 questions, si on peut répondre à chaque question par : Vrai, Faux ou Rien.
3. Un conseil municipal est constitué de 10 conseillers; le conseil a décidé de constituer 3 commissions, une relative à l'urbanisme formée de deux conseillers, une relative à la citoyenneté formée de trois conseillers et la dernière relative au logement et formée de 5 conseillers.
   a. Combien y-a-t-il de possibilités de constituer ces trois commissions ?
   b. En supposant que ces commissions soient constituées au hasard, quelle est la probabilité pour que deux conseillers donnés, M.U. et Mme.V. soient dans la même commission.
4. Pour accéder à une banque de données, vous devez taper un code commençant par trois lettres distinctes prises parmi $\{a; e; i; o; u\}$ et finissant par un nombre à 5 chiffres dont aucun chiffre n'est nul.
   Combien peut-on former de tels codes ?
5. Un chef d'entreprise doit recruter quatre employés, pour occuper quatre postes similaires, parmi 20 candidats, dont treize femmes et 7 hommes.
   a. Quel est le nombre de choix possibles ?
   b. Combien a-t-il de possibilités de recruter 4 employés de même sexe. ?
6. Le petit déjeuner:
   Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast. En plus de la confiture, elle peut éventuellement les beurrer. Combien a-t-elle de possibilités ?
7. Le problème du Chevalier de Méré :
   Le Chevalier de Méré a demandé à Pascal, s'il est plus facile d'obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois de suite un seul dé ou d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite deux dés. Retouver la réponse du grand mathématicien (1623-1662).
8. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer exactement deux rois ?
9. Une classe de 35 élèves doit élire ses deux délégués; combien y a-t-il de possibilités ?
10. Les représentants d'un parti politique américain doivent choisir parmi 10 personnes un "ticket" pour l'élection présidentielle: président, vice président; combien y a-t-il de possibilités ?
11. La secrétaire du bureau des ressources humaines d'une entreprise doit partager un ensemble de 12 candidatures en trois groupes de 4 candidatures . Combien y-a-t-il de possibilités d'effectuer ce partage ?
12. Même question si l'on doit constituer un groupe de 6 , un de 4 et un de 2.
13. La répartition par sexe $(X)$ et par nationalité $(Y)$ des 40 passagers d'un avion est déterminée par le tableau ci-dessous:

| $Y$ <br> $X$ | Suisse | Allemande | Italienne | Française | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Masculin | 3 | 10 | | 11 | 26 |
| Féminin | | 4 | | 3 | |
| Total | 8 | | | | |

Au cours d'une escale, trois passagers descendent de l'avion; déterminer les probabilités des événements suivants :

a. $A$ : " les trois passagers sont de même sexe."
   $B$ : "les trois passagers sont de même nationalité "
   $B'$ : "les trois passagers sont de trois nationalités différentes "
   $C$ : " un seul des trois passagers n'est pas français"
   $D = A \cap C$ et $E = A \cup C$ et $F$ : "il y a au moins une femme parmi ces trois passagers"

14. les deux boulangers d'un même village choisissent indépendemment l'un de l'autre, deux jours de fermeture hebdomadaire. On suppose que la probabilité de fermeture est la même pour les sept jours de la semaine et ceci pour les deux boulangeries.
    a. Préciser le cardinal de l'univers.
    b. Quelle est la probabilité d'avoir tous les jours au moins une boulangerie ouverte ?
    c. Quelle est la probabilité d'avoir un seul jour dans la semaine les deux boulangeries fermées ?
15. A chaque voyage, un représentant de commerce visite 5 des 8 villes de sa région. De combien de façons peut-il prévoir son itinéraire ?
16. De combien de façons, une compagnie peut-elle choisir quatre sites, parmi les 10 suceptibles d'accueillir de nouveaux centres de distribution ?
17. Un restaurant chinois présente une carte comprenant 17 entrées (dont le rouleau de printemps), 20 plats (dont des crevettes sel et poivre) et 10 desserts.
    a. Combien peut-on former de menus ?
    b. Quelle est la probabilité, en choisissant un menu au hasard, d'avoir un rouleau de printemps pour entrée?d'avoir des crevettes sel et poivre pour plat?d'avoir un rouleau de printemps pour entrée ou des crevettes sel et poivre pour plat?
18. Le problème du Prince de Toscane:
    Ce problème a été posé à Galilée par ce prince, grand joueur : le prince avait remarqué que le total 9 sortait moins souvent que le total 1 0 quand on lance trois dés, mais il ne comprenait pas pourquoi car, disait-il, il ya six façons d'obtenir 9 et également six façons d'obtenir 10.
    Pour 9 : 6-2-1, 5-3-1 , 5-2-2 , 4-3-2 , 3-3-3 , 4-4-1 .
    Pour 10: 6-3-1 , 6-2-2 , 5-4-1 , 5-3-2,4-4-2, 4-3-3.
    Reconstituer la solution de Galilée et déduisez en que ce prince était un très bon observateur .
19. Un examen comporte un QCM de 20 questions ; à chaque question, on peut répondre par vrai, faux ou ne pas répondre.
    Quelle est la probabilité d'avoir exactement 10 réponses justes ?
20. New-York, New-York... $M$

    Combien y-a-t-il de plus courts chemins de $O$ à $M$ ?

    $O$
21. Un couple a invité $n$ couples à un dîner autour d'une table ; Quelle est la probabilité pour que la maîtresse de maison se trouve en face de son conjoint ?
22. Quelle est la probabilité de touver les 6 bons numéros au loto?
    (on rappelle que les numéros sont à choisir parmi les nombres de 1 à 49).
23. Directement dérivés de l'art combinatoire cher à Leibniz, les poèmes de R.Queneau sont engendrés par 10 sonnets de 14 vers.Chacun de ces sonnets est imprimé sur une feuille découpée en bandelettes ; chaque vers peut être remplacé par le vers du même rang de l'un des 9 autres poèmes. Combien y-a-t-il de poèmes ?
24. Calculer : $4! + 0! + 5! + 8! + 5!$
25. Un institut de sondage effectue une enquête sur la lecture de trois périodiques.
    Voici les pourcentages des réponses affirmatives aux questions suivantes :

| **Questions** | **OUI** |
|---|---|
| Lisez vous le périodique $A$? | 56% |
| Lisez vous le périodique $B$? | 33% |
| Lisez vous le périodique $C$? | 27% |
| Lisez vous les périodiques $A$ et $B$ ? | 7% |

| **Questions** | **OUI** |
|---|---|
| Lisez vous les périodiques $B$ et $C$ ? | 8% |
| Lisez vous les périodiques $A$ et $C$ ? | 11% |
| Lisez vous les périodiques $A, B$ et $C$? | 2% |

Indiquez le pourcentage de personnes qui ne lisent aucun de ces trois périodiques ?

26. Quatre personnes prennent l'ascenseur au niveau 1 d'un immeuble, afin de monter aux niveaux supérieurs (2 à 5 ) ; Quelle est la probabilité que les personnes s'arrêtent à des étages différents ? (leurs choix sont indépendants et les étages sont visités de façons équiprobables).