CORRIGE EXAMEN BLANC

Math-L2-AES

Décembre 2013

1 EXERCICE-1

1. $Card\,(\Omega) = \binom{25}{10} = 3268760.$

2. Il y a 12 enseignants ; soit A l'événement : " Le jury est composé exclusivement d'enseignants ". $P\,(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{12}{10}}{\binom{25}{10}} = \dfrac{3}{148\,580} \simeq 2.02 \times 10^{-5}$

3. Soit B l'événement :" le jury est composé pour moitié de femmes", alors $P\,(B) = \dfrac{CardB}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{14}{5} * \binom{11}{5}}{\binom{25}{10}} = \dfrac{21\,021}{74\,290} \simeq 0.283\,0$

2 EXERCICE-2

On commence par calculer les effectifs marginaux.

	Sancerre (S)	**A**lsace (A)	
Rouge (R)	130	160	290
Blanc (B)	470	240	710
	600	400	1000

$P(R) = \dfrac{290}{1000} = 0.29$; $P(A) = \dfrac{400}{1000} = 0.40$ et
$P\,(R \cap A) = \dfrac{160}{1000} = 0.16$. On applique alors la formule de Poincaré :
$P\,(R \cup A) = P(R) + P(A) - P\,(R \cap A) = 0.29 + 0.40 - 0.16 = 0.53$

3 EXERCICE-3

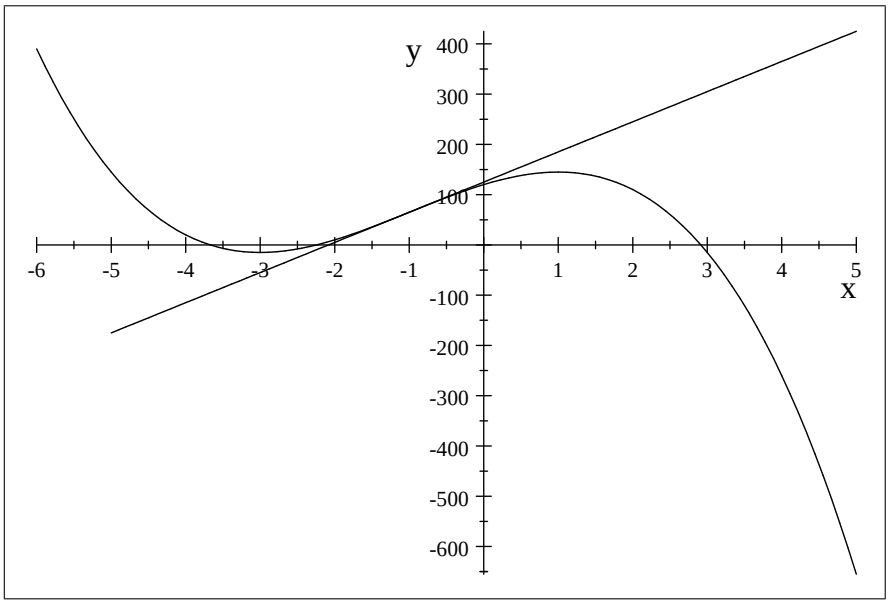
1. L e domaine est $]-\infty; +\infty[$ et les limites à l'infini sont celle de $-5x^3$, donc $+\infty$ à $-\infty$ et $-\infty$ à $+\infty$. La dérivée est : $f'\,(x) = -15x^2 - 30x + 45$; on calcule le discriminant $\Delta = 900 + 4 * 15 * 45 = 3600$ et on trouve deux racines distinctes : 1 et -3 avec $f'\,(x) = -15x^2 - 30x + 45 = -15\,(x+3)\,(x-1)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$y\prime$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	145	$\searrow$	$-\infty$

2. $f\,(-1) = 65.0$

3. Convexité : $f''\,(x) = -30x - 30$, ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en -1, est positive $]-\infty; -1[$ et négative dans $]-1; +\infty[$; la fonction est convexe sur $]-\infty; -1[$ et concave sur $]-1; +\infty[$; il y a un point d'inflexion $I(-1; 65)$.

4. La tangente en I a pour équation : $y = f'\,(x_0)\,(x - x_0) + f\,(x_0)$ et $f'\,(-1) = -15 + 30 + 45 = 60$ soit ici : $y = f'\,(-1)\,(x+1) + f\,(-1)$ soit $y = 60\,(x+1) + 65 = 60x + 125$ soit $\boxed{y = 60x + 125}$; pour la tracer il faut deux points ; on a I,on en prend un autre, par exemple $x = 0$,donne $y = 125$,soit le point $A\,(0; 125)$.

5. 

4 EXERCICE-4(8pts)

1. La matrice B
   a. On calcule : $\det(B) = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.7 * 0.8 - (-0.2 * -0.05) = 0.55$; ce déterminant est non nul donc B est inversible.
   b. $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} {}^{t}ComB = \frac{1}{0.55} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$
2. La matrice A des coefficients techniques de production est :
   $A = \begin{bmatrix} 15/50 & 12.5/250 \\ 10/50 & 50/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$; elle donne pour chaque secteur sa consommation intermédiaire sous forme de pourcentage de sa production totale ou les consommations intermédiaires pour chaque unité monétaire produite.
3. On prend l'équation fondamentale du modèle de léontieff : $X = AX + D \Leftrightarrow D = X - AX$,soit $D = (I - A)X$.Déterminons $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = B$. On doit déterminer la nouvelle demande finale :
   $D = \begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix}$; $BX = D \Leftrightarrow X = B^{-1}D$, en multipliant les deux membres à gauche par B^{-1},ce qui donne :
   $X = \frac{1}{0.55} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.27 \\ 301.82 \end{bmatrix}$

5 EXERCICE-5

1.
2. $\begin{cases} B'_x = 6x - 2y + 50 \\ B'_y = -4y - 2x + 30 \end{cases}$

3. $\begin{cases} r = B''_{x^2} = 6 \\ t = B''_{y^2} = -4 \\ s = B''_{xy} = B''_{yx} = -2 \end{cases}$

4. $E_{B/x} = \dfrac{x * B'_x}{B} = \dfrac{x\,(6x - 2y + 50)}{3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20}$

5. $B\,(10, 20) = 180$ et $E_{B/x}\,(10, 20) = \dfrac{10 * B'_x\,(10, 20)}{B\,(10, 20)} = \dfrac{10 * (60 - 40 + 50)}{180} = \dfrac{35}{9} \simeq 3.89$: ce qui signifie que si à partir de $x = 10$ et $y = 20$, x augmente de 1%, y restant constant égal à 20, on estime la variation de B à une hausse de 3.89%.

6 EXERCICE-6

Calculer $D = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$; le mieux est de le développer par rapport à la troisième ligne car il y a un zéro.

$D = a_{31} * C_{31} + a_{32} * C_{32} + a_{33} * C_{33}$,avec

$a_{31} = 6$, $a_{32} = 0$ et $a_{33} = 10.C_{ij} = (-1)^{i+j}\,D_{ij}$,soit :

$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 46$ et $C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -41$,soit $D = 6 * 46 + 0 * C_{32} + 10 * -41 = -134$.

On peut aussi utiliser la règle de Sarrus, soit :

$D = (7 * -5 * 10) + (2 * 3 * 6) + (3 * 0 * 8) - (6 * -5 * 8) - (3 * 2 * 10) - (7 * 3 * 0) = -134$