CORRIGE EXAMEN DE MATH SUJET D

L2-AES

Mercredi 16 Janvier 2013

1 EXERCICE-1

	H	F	
C	35	15	50
E	230	220	450
	265	235	500

1. $Card\,\Omega = \binom{500}{2} = 124750.$
2. $P(E) = \dfrac{\binom{450}{2}}{\binom{500}{2}} = 0.809\,8$
3. $P(H) = \dfrac{\binom{265}{2}}{\binom{500}{2}} = 0.280\,4$
4. $E \cap H \neq \varnothing$, on applique la formule de Poincaré : $P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H) = 0.809\,8 + 0.280\,4 - \dfrac{\binom{230}{2}}{\binom{500}{2}} = 0.879\,1$
$\dfrac{\binom{230}{2}}{\binom{500}{2}} = 0.211\,1$

2 EXERCICE-2

$C(q) = 1.75q^4 - 0.025q^2 + 31.5q + 2600$

1. $C_m(q) = C'(q) = 4 * 1.75q^3 - 0.05q + 31.5$, donc $C_m(30) = 4 * 1.75 * 30^3 - 0.05 * 30 + 31.5 = 189030.$
2. Le coût moyen est : $C_M(q) = \frac{1.75q^4 - 0.025q^2 + 31.5q + 2600}{q}$ et $C_M(30) = \frac{1.75*30^4 - 0.025*30^2 + 31.5*30 + 2600}{30} = 47367.42$

3 EXERCICE-3

1. On sait que la production totale est la somme de la consommation intermédiaire et de la demande finale ;
On a donc : $\begin{cases} d_1 = 140 - (80 + 20) = 40 \\ d_2 = 120 - (30 + 60) = 30 \end{cases}$
2. $A = \begin{bmatrix} \dfrac{80}{140} & \dfrac{20}{120} \\ \dfrac{30}{140} & \dfrac{60}{120} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{7} & \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$
3. On a l'équation : $\boxed{\underbrace{X}_{\text{PRODUCTION TOTALE}} = \underbrace{AX}_{consommation\ intermediaire} + \underbrace{D}_{\text{DEMANDE FINALE}}}$,

ce qui donne : $X - AX = D \Leftrightarrow (I - A)X = D$; on sait que pour résoudre cette équation on doit regarder si la matrice

$C=(I-A)$ est inversible.On détermine alors cette matrice : $I-A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{4}{7}&\frac{1}{6}\\\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{1}{6}\\-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=B$

On calcule : $\det(B)=\begin{vmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{1}{6}\\-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{5}{28}$; ce déterminant est non nul , B est donc inversible et en ecrivant : $B^{-1}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$, on résoud : $\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{1}{6}\\-\frac{3}{14}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, ce qui donne : $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{14}{5}&\frac{14}{15}\\\frac{6}{5}&\frac{12}{5}\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}2.8&0.93\\1.2&2.4\end{bmatrix}$ et permet de résoudre : $BX=D'$ donne : $X=B^{-1}D'$ soit $X=\begin{bmatrix}\frac{14}{5}&\frac{14}{15}\\\frac{6}{5}&\frac{12}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}45\\35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{476}{3}\\138\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}158.67\\138\end{bmatrix}$

$Autre$méthode pour inverser B : $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}{}^{t}Com(B)$. Les quatre cofacteurs :

a.

a_{ij}	$a_{11}=3/7$	$a_{12}=-1/6$	$a_{21}=-3/14$	$a_{22}=1/2$
C_{ij}	$C_{11}=0.5$	$C_{12}=-(-3/14)$	$C_{21}=-(-1/6)$	$C_{22}=3/7$

Ce qui donne $Com(B)=\begin{bmatrix}0.5&3/14\\1/6&3/7\end{bmatrix}$, donc ${}^{t}Com(B)=\begin{bmatrix}0.5&1/6\\3/14&3/7\end{bmatrix}$donc $B^{-1}=\frac{28}{5}\begin{bmatrix}0.5&1/6\\3/14&3/7\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}2.8&\frac{14}{15}\\\frac{6}{5}&\frac{12}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.8&0.93\\1.2&2.4\end{bmatrix}$

4 EXERCICE-4

1. $f'_x(x,y)=\frac{14}{5}*x^{\frac{2}{5}-1}y^{\frac{1}{4}}=\frac{14}{5}x^{\frac{-3}{5}}y^{\frac{1}{4}}$et $f'_y(x,y)=\frac{7}{4}*x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}-1}=\frac{7}{4}*x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{-3}{4}}$

2. $E_{z/y}=\frac{y*z'_y}{z}=\frac{y*\frac{7}{4}*x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{-3}{4}}}{5*x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}}=0.35$ Si on augmente le volume d'équipement de 1%, (le volume d'heures de travail restant constant) on doit s'attendre à une augmentation de 0.35 % de la production.

3. $f''_{x^2}(x,y)=-\frac{42}{25}x^{\frac{-8}{5}}y^{\frac{1}{4}}$et $f''_{y^2}(x,y)=-\frac{21}{16}x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{-7}{4}}$ et $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=\frac{14}{20}*x^{\frac{-3}{5}}y^{\frac{-3}{4}}$.

5 EXERCICE-5

$y'=-1.3*2te^{-1.3t^2+10}=-2.6te^{-1.3t^2+10}$,en utilisant : $(e^u)'=u'e^u$
$y"=-2.6e^{-1.3t^2+10}-2.6t\left(-2.6te^{-1.3t^2+10}\right)=2.6e^{-1.3t^2+10}\left(2.6t^2-1\right)$,en utilisant $(uv)'=u'v+uv'$, la dérivée seconde est du signe de $\left(2.6t^2-1\right)$ car $e^{-1.3t^2+10}>0$,on en déduit d'après la règle sur le signe du trinôme du second degré avec $t=\sqrt{\frac{1}{2.6}}=0.62$ et $t=-\sqrt{\frac{1}{2.6}}=-0.62$;

x	$-\infty$		-0.62		0.62		$+\infty$
y"		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		Convexe		Concave		Convexe	

; la dérivée seconde s'annule en -0.62 et en 0.62 avec changement de signe, on a deux points d'inflexion : $A(-0.62, e^{-1.3*0.62^2+10})$ et $B(0.62\,; e^{-1.3*0.62^2+10})$ avec $e^{-1.3*0.62^2+10} = 13363.47$

6 EXERCICE-6 Bonus

Calculer $D = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 82$; le mieux est de le développer par rapport à la deuxieme ligne car il y a un zéro.

$D = a_{21} * C_{21} + a_{22} * C_{22} + a_{23} * C_{23}$,avec

$a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$ et $a_{23} = 3$.$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$,soit :

$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 52$ et $C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -42$ soit $D = 4 * 52 + 0 * C_{22} + 3 * -42 = 82$. On peut aussi utiliser la règle de Sarrus, soit :

$D = (6 * 0 * 10) + (2 * 3 * 6) + (4 * 9 * 8) - (6 * 0 * 10) - (9 * 3 * 6) - (4 * 2 * 10) = 82.$