CORRIGE EXAMEN BLANC

L2AES

Janvier 2012

1 EXERCICE-1

1. $Card\,(\Omega) = \binom{25}{10} = 3268760$.
2. Il y a 12 enseignants ; soit A l′événement : " Le jury est composé exclusivement d'enseignants ". $P\,(A) = \dfrac{CardA}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{12}{10}}{\binom{25}{10}} = 2.02 \times 10^{-5}$
3. Soit B l'événement :" le jury est composé pour moitié de femmes", alors $P\,(B) = \dfrac{CardB}{Card\Omega} = \dfrac{\binom{14}{5} * \binom{11}{5}}{\binom{25}{10}} = 0.283\,0$

2 EXERCICE-2

On commence par calculer les effectifs marginaux.

	Sancerre (S)	**A**lsace (A)	
Rouge (R)	130	160	290
Blanc (B)	470	240	710
	600	400	1000

$P(R) = \dfrac{290}{1000} = 0.29$; $P(A) = \dfrac{400}{1000} = 0.40$ et
$P\,(R \cap A) = \dfrac{160}{1000} = 0.16$. On applique alors la formule de Poincaré :
$P\,(R \cup A) = P(R) + P(A) - P\,(R \cap A) = 0.29 + 0.40 - 0.13 = 0.56$

3 EXERCICE-3

1. Calculer l'élasticité partielle de P par rapport à L. L'élasticité partielle de P par rapport à L est donnée par : $\dfrac{\partial P}{\partial L}\,(L;K) = \left(1.01 * 0.25L^{-0.75}\right) * K^{0.75}$ et $E_{P/L} = \dfrac{L * P'_L}{P} = \dfrac{L * \left(1.01 * 0.25L^{-0.75}\right) * K^{0.75}}{1.01L^{0.25}K^{0.75}} = 0.25$
2. Application numérique : on a une élasticité constante. Si L augmente de 1%, P augmente de 0.25%.
   $L = 147$ et $K = 208$.$\dfrac{147 * 0.327\,6}{192.\,62} \simeq \boxed{0.25}$.
   Pour ceux qui ont fait les calculs numériques : $P\,(147; 208) = 1.01 * 147^{0.25} * 208^{0.75} = 192.62$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial L}\,(147; 208) = \boxed{0.252\,5 * 208^{0.75} * 147^{-0.75} = 0.327\,6}$, enfin : $E_{P/L} = \dfrac{147 * 0.327\,6}{192.62} = 0.25$

4 EXERCICE-4**(8pts)**

1. La matrice B
   a. On calcule : $\det\,(B) = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.7 * 0.8 - (-0.2 * -0.05) = 0.55$; ce déterminant est non nul donc B est inversible.
   b. $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)}\,{}^{t}ComB = \dfrac{1}{0.55}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$

2. La matrice A des coefficients techniques de production est :
$A = \begin{bmatrix} 15/50 & 12.5/250 \\ 10/50 & 50/250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$; elle donne pour chaque secteur sa consommation intermédiaire sous forme de pourcentage de sa production totale ou les consommations intermédiaires pour chaque unité monétaire produite.

3. On prend l'équation fondamentale du modèle de léontieff : $X = AX + D \Leftrightarrow D = X - AX$,soit $D = (I - A)\,X$.Déterminons $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = B$. On doit déterminer la nouvelle demande finale :
$D = \begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix}$; $BX = D \Leftrightarrow X = B^{-1}D$, en multipliant les deux membres à gauche par B^{-1},ce qui donne :
$X = \dfrac{1}{0.55}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.27 \\ 301.82 \end{bmatrix}$

5 EXERCICE-5(5pts)

Un monopole vend deux produits dont la fonction de profit est donnée par :(x et y quantités demandées respectives des deux biens):

$$B\left(x,y\right) = -3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20.$$

1. $\begin{cases} B'_x = -6x - 2y + 50 \\ B'_y = -2x - 4y + 30 \end{cases}$

2. $\begin{cases} r = B"_{x^2} = -6 \\ t = B"_{y^2} = -4 \\ s = B"_{xy} = B"_{yx} = -2 \end{cases}$

3. $E_{B/x} = \dfrac{x * B'_x}{B} = \dfrac{x\left(-6x - 2y + 50\right)}{-3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20}$

4. $B\left(x,y\right) = -3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20$

5. $B\left(10,20\right) = -420$ et $E_{B/x}\left(10,20\right) = \dfrac{10 * B'_x\left(10,20\right)}{B\left(10,20\right)} = \dfrac{10 * \left(-60 - 40 + 50\right)}{-420} = 1.19$,ce qui signifie que si à partir de $x = 10$ et $y = 20$, x augmente de 1%, y restant constant égal à 20, B on estime la variation de B à une hausse de 1.19%.

6 EXERCICE-6

1. $y' = -0.5 * 2te^{-0.5t^2} = -te^{-0.5t^2}$,en utilisant : $\left(e^u\right)' = u'e^u$

2. $y" = t^2e^{-0.5t^2} - e^{-0.5t^2} = e^{-0.5t^2}\left(t^2 - 1\right)$,en utilisant $(uv)' = u'v + uv'$, soit $y" = e^{-0.5t^2}\left(t-1\right)\left(t+1\right)$,la dérivée seconde est du signe de $(t-1)(t+1)$ car $e^{-0.5t^2} > 0$,on en déduit d'après la règle sur le signe du trinôme du second degré :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y"$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		Convexe		Concave		Convexe	

; la dérivée seconde s'annule en -1 et en 1 avec changement de signe, on a deux points d'inflexion : $A(-1, e^{-0.5})$ et $B(1, e^{-0.5})$.

7 EXERCICE-7

Calculer $D = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$; le mieux est de le développer par rapport à la troisième ligne car il y a un zéro.

$D = a_{31} * C_{31} + a_{32} * C_{32} + a_{33} * C_{33}$,avec

$a_{31} = 6$, $a_{32} = 0$ et $a_{33} = 10.C_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$,soit :

$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 46$ et $C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -41$,soit $D = 6 * 46 + 0 * C_{32} + 10 * -41 = -134$.

On peut aussi utiliser la règle de Sarrus, soit :

$D = (7 * -5 * 10) + (2 * 3 * 6) + (3 * 0 * 8) - (6 * -5 * 8) - (3 * 2 * 10) - (7 * 3 * 0) = -134$