CORRIGE CONTRÔLE CONTINU B

L2 AES

NOVEMBRE 2012-MARDI

1 EXERCICE-1(6pts)

1. ADN
   a. $Card\,\Omega = 4^{30} = 1.\,152\,922 \times 10^{18}$
   b. $\binom{30}{10} = 3.\,004\,502 \times 10^{7}$
2. Jeu de cartes
   a. Soit A l'événement : "obtenir exactement 2 valets", $Card\ A = \binom{4}{2} * \binom{48}{4} = 1167\,480$ et $P\ (A) = \dfrac{\binom{4}{2} * \binom{48}{4}}{\binom{52}{6}} = \dfrac{621}{10\,829} = 5.\,73 \times 10^{-2}$
   b. Soit B l'événement " tirer exactement au moins 2 valets ", $P\ \left(\overline{B}\right) = \dfrac{\binom{4}{0} * \binom{48}{6} + \binom{4}{1} * \binom{48}{5}}{\binom{52}{6}} = \dfrac{50\,853}{54\,145} = 0.939\,2$ et $P\ (B) = 1 - P\ \left(\overline{B}\right) = 1 - 0.939\,2 = 0.060\,8$
   c. Soit C l'événement : "obtenir exactement 4 rois" ; $P\,(C) = \dfrac{\binom{4}{4} * \binom{48}{2}}{\binom{52}{6}} = \dfrac{3}{54\,145} = 5.\,54 \times 10^{-5}$
   d. On doit calculer $P\ (A \cup C)$; on étudie $A \cap C$; cet événement est différent du vide on applique donc la formule de Poincaré : $P\ (A \cup C) = P\ (A) + P\ (C) - P\ (A \cap C) = \dfrac{621}{10\,829} + \dfrac{3}{54\,145} - \dfrac{\binom{4}{4} * \binom{4}{2}}{\binom{52}{6}} = \dfrac{584\,301}{10\,179\,260} = 5.\,74 \times 10^{-2}$
3. La formule du binôme de Newton est : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}}$; on peut utiliser le triangle de Pascal (4éme ligne) : $(3x+4)^6 = (3x+4)^6 = 729x^6 + 5832x^5 + 19\,440x^4 + 34\,560x^3 + 34\,560x^2 + 18\,432x + 4096 = (3x)^6 + 6\,(3x)^5 * 4 + 15\,(3x)^4 * 4^2 + 20\,(3x)^3 * 4^3 + 15\,(3x)^2 * 4^4 + 6\,(3x) * 4^5 + 4^6$

2 EXERCICE-2

1. On sait que : $C_n = C_0\,(1+i)^n$, soit ici : $C_n = 9000\,(1.0525)^n$ et on doit résoudre : $9000\,(1.0525)^n = 15000$, soit $(1.0525)^n = \dfrac{15000}{9000}$ et en passant aux logaritmes népériens : $\ln\left(1.0525^n\right) = \ln\frac{5}{3}$ soit $n \ln 1.0525 = \ln\frac{5}{3}$ ou $n = \frac{\ln\frac{5}{3}}{\ln 1.0525} = 9.\,98$ ans
2. $E_{R/q} = \frac{qR'}{R}$; on calcule $R'(q) = 5\left[e^{-3q^2} + q\,(-6q)\,e^{-3q^2}\right] = 5e^{-3q^2}\left[1 - 6q^2\right]$, ce qui donne : $E_{R/q} = \dfrac{q * 5e^{-3q^2}\left(1-6q^2\right)}{5qe^{-3q^2}} = 1 - 6q^2$.

3 EXERCICE-3

1. $-\dfrac{3}{4}y^3 - 2x^2 - 2x^2y^{1.5} + 5y + 3x - 40.$

2. $\pi'_x(x,y) = -4x - 4xy^{1.5} + 3$ et $\pi'_y(x;y) = -\dfrac{9}{4}y^2 - 3x^2y^{0.5} + 5$
3. $\pi^{"}_{x^2}(x,y) = -4 - 4y^{1.5}$ et $\pi^{"}_{y^2}(x,y) = -\dfrac{18}{4}y - 1.5x^2y^{-0.5}$ et $\pi^{"}_{xy}(x,y) = -6xy^{0.5}$

4 EXERCICE-4

$C(q) = 0.0175q^4 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600$

1. $C_m(q) = C'(q) = 4*0.0175q^3 - 0.5q + 31.5$, donc $C_m(40) = 4*0.0175*40^3 - 0.5*40 + 31.5 = 4491.5$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la 41 éme unité.
2. Le coût moyen est : $C_M(q) = \frac{0.0175q^4 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600}{q}$ et $C_M(40) = \frac{0.0175*40^4 - 0.25*40^2 + 31.5*40 + 2600}{40} = 1206.5$

5 EXERCICE-5

1. $f(x) = -10x^3 + 15x^2 + 180x + 35$
2. $f(0.5) = 127.5$
3. Le domaine est $]-\infty;+\infty[$ et les limites à l'infini sont celle de $-10x^3$, donc $-\infty$ à $+\infty$ et $+\infty$ à $-\infty$. La dérivée est : $f'(x) = -30x^2 + 30x + 180 = -30(x+2)(x-3)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$y\prime$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-185	$\nearrow$	440	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$

4. Convexité : $f^{"\prime}(x) = -60x + 30$ ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en $1/2$, est positive sur $]-\infty;1/2[$ et négative dans $]1/2;+\infty[$; la fonction est convexe sur $]-\infty;1/2[$ et concavesur $]1/2;+\infty[$; il y a un point d'inflexion $I(1/2;127.5)$ car $f(0.5) = 127.5$
5. La tangente en I a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit ici : $y = f'(0.5)(x - 0.5) + f(0.5)$ soit $y = 187.5(x - 0.5) + 127.5$, soit $y = 187.5x + 33.75$
6.