CORRIGE CONTRÔLE CONTINU A

L2 AES

NOVEMBRE 2012-MARDI

1 EXERCICE-1(6pts)

1. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.
   a. $Card\,\Omega = \binom{32}{5} = 201376$ et A l'événement : "obtenir exactement trois rois", $Card\,A = \binom{4}{3} * \binom{28}{2} = 1512$ et P $(A) = \dfrac{\binom{4}{3} * \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{27}{3596} = 7.5 \times 10^{-3}$

   b. Soit B l'événement " tirer au moins un roi ", on calcule $P\left(\overline{B}\right) = \dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = 0.488\,0$, la probabilité de ne tirer aucun roi ; enfin $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0.488\,0 = 0.512$

   c. Soit C l'événement " tirer exactement deux dames ", $P(C) = \dfrac{\binom{4}{2} * \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{351}{3596} = 9.76 \times 10^{-2}$

   d. On doit calculer $P(A \cup C)$; on étudie $A \cap C$; cet événement est différent du vide on applique donc la formule de Poincaré : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{27}{3596} + \frac{351}{3596} - \dfrac{\binom{4}{3} * \binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{2643}{25\,172} = 0.1050.$

2. ADN
   a. $Card\,\Omega = 4^{40} = 1.\,208\,925\,8 \times 10^{24}$ car $\Omega = \{T; A; G; C\}^{40}$ un résultat possible est un $40 - uplet$ formé de T, A, G ou C.

   b. $\binom{40}{10} = 847\,660\,528$

3. La formule du binôme de Newton est : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}}$; utilise le triangle de Pascal (4éme ligne) :

   $(4x+3)^5 = (4x)^5 + 5(4x)^4 * 3 + 10(4x)^3 * 3^2 + 10(4x)^2 * 3^3 + 5(4x) * 3^4 + 3^5 = 1024x^5 + 3840x^4 + 5760x^3 + 4320x^2 + 1620$ $x + 243$

2 EXERCICE-2

1. On sait que : $C_n = C_0(1+i)^n$, soit ici : $C_n = 30000(1.0375)^n$ et on doit résoudre : $30000(1.0375)^n = 40000$, soit $(1.0375)^n = \frac{4}{3}$ et en passant aux logaritmes népériens : $\ln(1.0375^n) = \ln\frac{4}{3}$ soit $n \ln 1.0375 = \ln\frac{4}{3}$ ou $n = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln 1.0375} = 7.$ 81 ans

2. $E_{R/q} = \frac{qR'}{R}$; on calcule $R'(q) = 10\left[3q^2e^{-q^2} + q^3(-2q)\,e^{-q^2}\right] = 10q^2e^{-q^2}\left[3 - 2q^2\right]$, ce qui donne : $E_{R/q} = \dfrac{q * 10q^2e^{-q^2}\left(3 - 2q^2\right)}{10q^3e^{-q^2}} = 3 - 2q^2$

3 EXERCICE-3

1. $-3y^2 - 2x^2 - 2xy^{1.5} + 50y + 30x - 40.$

2. $\pi'_x(x, y) = -4x - 2y^{1.5} + 30$ et $\pi'_y(x; y) = -6y - 2x * 1.5y^{0.5} + 50 = -6y - 3xy^{0.5} + 50$

3. $\pi^{"}_{x^2}(x,y) = -4$ et $\pi^{"}_{y^2}(x,y) = -6 - 1.5xy^{-0.5}$ et $\pi^{"}_{xy}(x,y) = -3y^{0.5}$

4 EXERCICE-4

$C(q) = 0.00175q^3 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600$

1. $C_m(q) = C'(q) = \left(0.00175q^3 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600\right)' = 0.005\,25q^2 - 0.5q + 31.5$, donc $C_m(50) = 0.005\,25 * 50^2 - 0.5 * 50 + 31.5 = 19.625$ ce qui donne une estimation du coût d'une unité supplémentaire donc de la 51 éme unité.

2. Le coût moyen est : $C_M(q) = \frac{0.00175q^3 - 0.25q^2 + 31.5q + 2600}{q}$ et $C_M(50) = \frac{0.00175*50^3 - 0.25*50^2 + 31.5*50 + 2600}{50} = 75.375$.

3. $E_{C/q} = \frac{qC'}{C} = \dfrac{C_m}{C/q} = \dfrac{C_m}{C_M}$ soit $E_{C/q}(50) = \frac{19.625}{75.375} = 0.26$; si à partir d'une quantité de 50, q augmente de 1%, alors la variation prévisible du coût est de 0.26%.

5 EXERCICE-5

1. L e domaine est $]-\infty; +\infty[$ et les limites à l'infini sont celle de $2x^3$, donc $-\infty$ à $-\infty$ et $+\infty$ à $+\infty$. La dérivée est : $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3)$; la règle sur le signe du trinome du second degré (signe contraire de a entre les racines) permet de conclure sur le sens de variations :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	59	$\searrow$	-66	$\nearrow$	$+\infty$

2. Convexité : $f^{"\prime}(x) = 12x - 6$ ce qui montre que la dérivée seconde s'annule en $1/2$, est négative sur $]-\infty; 1/2[$ et positive dans $]1/2; +\infty[$; la fonction est concave sur $]-\infty; 1/2[$ et convexe sur $]1/2; +\infty[$; il y a un point d'inflexion $I(1/2; -3.5)$ car $f(0.5) = -3.\,5$

3. La tangente en I a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit ici : $y = f'(0.5)(x - 0.5) + f(0.5)$ soit $y = -37.5(x - 0.5) - 3.5$, soit $y = -37.\,5x + 15.25$

4.